

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

Б. В. РАУШЕНБАХ

ВИБРАЦИОННОЕ ГОРЕНИЕ



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1961

АННОТАЦИЯ

Книга посвящена проблеме неустойчивости процесса горения, с которой столкнулись при создании жидкостных ракетных двигателей, воздушно-реактивных двигателей, форсированных топок тепловых электростанций, при осуществлении ряда физических экспериментов и опытов по теории горения.

В книге систематически излагается современная теория возбуждения продольных акустических колебаний теплоподводом. Рассматриваются закономерности, свойственные этому типу колебаний, причем для их анализа широко привлекаются сведения из гидромеханики, акустики, теории горения, используется математический аппарат теории регулирования и теории колебаний.

Книга рассчитана на научных работников, инженеров, аспирантов, студентов старших курсов университетов и высших технических учебных заведений, имеющих дело с вопросами теории горения и теории колебаний сплошных сред, а также на лиц, работающих в области современного двигателестроения и теплотехники.

Раушенбах Борис Викторович.

Вибрационное горение

Редактор О. Э. Дымова

Техн. редактор П. Я. Мурашова

Корректор Г. Г. Желтова

Сдано в набор 4/1 1961 г. Подписано к печати 9/V 1961 г.
Бумага $84 \times 108 \frac{1}{32}$. Физ. печ. л. 15,625. Условн. печ. л. 25,68. Уч.-изд. л.
25,31. Тираж 7000 экз. Т-03156. Цена книги 1 р. 47 к. Заказ № 762

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Введение	9
Глава I. Общая характеристика колебаний, возбуждаемых теплоподводом	13
§ 1. Некоторые экспериментальные факты	13
§ 2. Схема идеализации процесса самовозбуждения продольных акустических колебаний горением	19
Глава II. Распространение возмущений в движущемся газе	29
§ 3. Линеаризация уравнений гидромеханики	29
§ 4. Акустические волны в движущемся неизотропическом газе	35
§ 5. Пример простейшей краевой задачи	42
§ 6. Стоячие волны $\bar{p}$ и $\bar{v}$	47
§ 7. Бегущие волны $\bar{n}$, $\bar{\omega}$ и $\bar{s}$	59
§ 8. Устойчивость газового течения	61
§ 9. Продольные автоколебания в газовом течении	72
Глава III. Источники энергии автоколебаний	75
§ 10. Два источника энергии при термическом возбуждении звука	75
§ 11. Поток акустической энергии	82
§ 12. Энергия, сообщаемая колебательной системе при реализации элементарных процессов в зоне теплоподвода	91
§ 13. Энергия, сообщаемая колебательной системе в общем случае	101
§ 14. Возбуждение колебательной системы волнами зитрони	107
Глава IV. Расчетная идеализация процессов в зоне горения	112
§ 15. Изменение возмущений при пересечении области горения	112

§ 16. Свойства плоскости теплоподвода Σ	124
§ 17. Приведение условий на плоскости разрыва Σ к каноническому виду	139
§ 18. Источники энергии автоколебаний при произволь- но сложном процессе в зоне теплоподвода	143
§ 19. Возбуждение колебательной системы в общем случае	146
§ 20. Диаграммы границ устойчивости для типичных случаев	158
§ 21. Сравнение относительной значимости теплового и механического источников энергии при возбуж- дении колебаний	162
Глава V. Возбуждение колебаний теплоподводом при отсутствии потерь	170
§ 22. Вводные замечания	170
§ 23. Составление и решение характеристического урав- нения	178
§ 24. Построение границ устойчивости	185
§ 25. Анализ условий возбуждения	204
§ 26. Влияние запаздывания тепловыделения на возбуж- дение акустических колебаний	210
§ 27. Частота колебаний	217
§ 28. Ступенчатое изменение частот колебаний с изме- нением положения зоны горения	220
§ 29. Эксперименты по влиянию положения зоны горе- ния на процесс колебаний	229
Глава VI. Возбуждение колебаний теплоподводом при наличии потерь на концах трубы	251
§ 30. Потери на излучение	251
§ 31. Характеристическое уравнение задачи при учете потерь на концах трубы	255
§ 32. Численное рассмотрение некоторых частных слу- чаев	258
§ 33. Полное поглощение энергии на одном конце тру- бы	267
Глава VII. Механизмы обратной связи при возбуждении акустических колебаний горением	277
§ 34. Классификация механизмов обратной связи	277
§ 35. Механизмы обратной связи, имеющие в основе смесеобразование	286
§ 36. Механизмы обратной связи, имеющие в основе гидромеханические явления	296
§ 37. Механизмы обратной связи, основанные на зако- номерностях собственно горения	313
§ 38. Устойчивость плоского фронта пламени	322

Глава VIII. Расчет автоколебаний с учетом нелинейных свойств зоны теплоподвода	344
§ 39. Общая характеристика автоколебаний	344
§ 40. Существенные целильности в зоне горения	347
§ 41. Автоколебания при отсутствии потерь на концах трубы	358
§ 42. Автоколебания при наличии потерь на концах трубы	368
§ 43. Применимость развитых методов в других случаях	373
Глава IX. Вибрационное горение	376
§ 44. Стадии развития процесса вибрационного горения	376
§ 45. Гипотеза о максимуме акустической энергии, излучаемой областью теплоподвода	381
§ 46. Экспериментальная проверка гипотезы о максимуме акустической энергии	394
§ 47. Возбуждение и подавление вибрационного горения	401
Глава X. Некоторые частные случаи самовозбуждения акустических колебаний	418
§ 48. Возбуждение звука в трубе Рийке	418
§ 49. Вибрационное горение при распространении пламени в неподвижном газе	436
§ 50. Возникновение колебаний в пылеугольных топках	459
§ 51. Вибрационное горение в прямоточных воздушно-реактивных двигателях	467
§ 52. Продольные колебания в жидкостных реактивных двигателях	471
Предметный указатель	498

ПРЕДИСЛОВИЕ

В последние годы проблема возбуждения акустических колебаний в газовом столбе, в котором происходит горение, стала весьма злободневной. Это вызвано тем, что ряд практически важных задач, связанных с созданием высокофорсированных камер сгорания, не может быть решен без тщательного анализа явления, которое иногда называют вибрационным горением. Указанное обстоятельство находит свое отражение в большом количестве статей, публикуемых в зарубежных изданиях.

К сожалению, работы иностранных авторов посвящены главным образом вопросам возбуждения неустойчивости в ракетных двигателях, и, следовательно, могут иметь сравнительно узкую сферу приложения. В то же время известно, что аналогичные явления наблюдаются в промышленных топках, экспериментальных установках для изучения процессов сгорания, в ряде физических экспериментов (труба Рийке) и т. п. Поэтому уже давно назрела необходимость в более общем, чем обычно, рассмотрении проблемы возбуждения акустических колебаний теплоподводом (в частности горением). Одной из задач, которая ставилась при написании этой книги, была попытка разработки основ систематической теории процесса вибрационного горения, позволяющей рассмотреть все множество частных случаев с единой точки зрения. Однако рассмотрение конкретных инженерных проблем в рамках настоящей книги было бы нецелесообразным. Это значительно увеличило бы объем книги, а главное, затруднило бы исследование сути явления и разработку общих методов, поскольку внимание читателя неизбежно расплывалось бы детальным анализом различных частных вопросов. Кроме того, не следует забывать, что актуальные сегодня инженерные задачи могут стать неинтерес-

ными через несколько лет, а несущественные сейчас — стать центральными. Поэтому представлялось более правильным дать очерк общей теории, оставив разработку конкретных задач тем, кто ими непосредственно занимается. Лишь как завершение общей теории в X главе даны примеры приложения ее к некоторым практическим задачам.

Поставленная цель в значительной мере определяет как содержание книги, так и метод изложения вопроса. Главным содержанием книги является анализ некоторой идеализированной схемы (горение в цилиндрической трубе), причем экспериментальный материал в своей основной массе также относится к опытам академического характера (горение смеси в небольшой трубе, за простым стабилизатором или без него, но не горение в реальных топках, двигателях и т. п.). Чтобы сделать материал доступным широким кругам инженеров, изложение вопроса ведется наиболее простыми методами и достаточно подробно; поэтому для понимания рассматриваемых задач обычная подготовка по математике и механике, которую дают наши высшие технические учебные заведения, является достаточной. Стремясь к простоте и краткости, автор нередко жертвовал строгостью изложения, но пытался, везде где это возможно, пояснить физическую сущность рассматриваемого явления.

Предлагаемая вниманию читателя книга не является полной сводкой современного состояния вопроса. В ней излагаются главным образом результаты, полученные автором и частично опубликованные в разное время в периодических изданиях. Это неизбежно наложило свой отпечаток не только на постановку задач и метод их рассмотрения, но и на содержание книги. В тех случаях, когда используются работы других авторов, всюду делаются соответствующие ссылки; отсутствие последних означает, что результаты (как теоретические, так и экспериментальные) принадлежат автору. Помимо ряда опубликованных ранее работ, в основу книги были положены лекции, которые в течение последних лет читались автором студентам Московского физико-технического института.

По своему содержанию книга рассчитана на студентов старших курсов высших учебных заведений, аспирантов

и инженерно-технических работников, связавших с вопросами теории колебаний, теории горения и газовой динамики. Книга может также служить учебным пособием по соответствующим курсам.

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность инж. Л. Д. Штовой, принимавшей самое активное участие в постановке экспериментов, нашедших отражение в настоящей книге, инж. Т. М. Кувардиной, способствовавшей успешному проведению трудоемких численных расчетов, а также Н. С. Натанзону, сделавшему ряд ценных замечаний при ознакомлении с рукописью.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, создание высокофорсированных топок сопряжено с рядом трудностей. Одной из них является борьба с высокочастотными колебаниями, возникающими в камере сгорания. Эти колебания могут существенно нарушать процесс горения и приводить к разрушению конструктивных элементов топки или двигателя. Известны примеры возбуждения колебаний в топках тепловых электростанций при переходе к форсированным режимам горения. Эти явления наблюдались, например, при доводке предтопок, работавших на угольной пыли, причем пульсации выводили из строя элементы топок. Кроме того, аналогичные явления известны и из практики доводки жидкостных ракетных двигателей, как видно из многочисленных статей, публикуемых в периодической печати.

С другой стороны, известно, что ряд опытов, поставленных на промышленных топках, показал большую перспективность создания топок, в которых вибрационное сгорание является нормальным режимом горения. Реализация таких режимов сулит большие выгоды в части увеличения теплонапряженности топок. Кроме того, в последнее время стали появляться статьи, указывающие на большие возможности, которые открывает переход к вибрационному сгоранию в металлургии, химической промышленности и т. д.

Во всех этих случаях колебания (вне зависимости от того, вредны они или полезны) связаны со взаимодействием горения и акустических колебаний газового столба, заключенного в двигателе, топке или ином устройстве. Рассматриваемое явление достаточно сложно и еще мало

изучено. Это приводит к тому, что как борьба с ним, так и его реализация в соответствующих установках ведется обычно вслепую.

Несмотря на то, что вибрационное горение известно давно, и ему посвящено сравнительно много работ, далеко не все вопросы теории этого явления разработаны. В результате основные теоретические выводы сводятся к утверждению, что частоты колебаний определяются акустическими свойствами системы, условия возбуждения сводятся к критерию Рэлея (точность которого будет показана в гл. III), а из большого количества возможных механизмов обратной связи до сих пор достаточно подробно рассмотрен (применительно к жидкостным реактивным двигателям) лишь так называемый механизм Кронка.

При попытке разработки основ теории процесса вибрационного горения выявилась необходимость систематического рассмотрения изучаемого явления, причем рассмотрения с наиболее общей точки зрения. Такая общность полезна потому, что дает возможность анализировать самые различные случаи путем применения единой методики.

Кроме того, единство и общность методики позволяет производить обоснованные упрощения при обращении к тем или иным конкретным задачам и нередко избавляет от утомительной необходимости привлекать для объяснения каждого нового экспериментального факта новую гипотезу, сомнительным достоинством которой является то, что она объясняет только факт, вызвавший ее к жизни.

Чтобы осуществить достаточно широкое рассмотрение задач, оказалось необходимым:

1) рассмотреть характер распространения акустических возмущений в одномерном изэнтропическом течении (хотя эта задача и рассматривалась другими авторами, представлялось целесообразным дать несколько отличное от привычного решение);

2) дать общий метод, который позволял бы «склеивать» одномерные процессы слева и справа от зоны горения, не теряя существенных свойств сложного трехмерного процесса горения;

3) произвести оценку влияния потерь энергии в концевых сечениях потока на склонность системы к самовозбуждению акустических колебаний;

4) исследовать энергетическую сторону изучаемого явления; в частности, решить вопрос об источнике, из которого черпается энергия для поддержания автоколебаний;

5) дать классификацию возможных механизмов обратной связи и наметить пути решения вопроса о том, каким образом колебательная система «выбирает» некоторый конкретный механизм обратной связи из множества возможных;

6) привести пример решения целлинейной задачи, т. е. определять амплитуды и частоты установившихся колебаний для некоторого частного случая; этот частный случай должен одновременно дать наглядное представление о методе решения, пригодном для большого класса аналогичных задач.

Зная закономерности распространения акустических возмущений в одномерном течении газа и умея сводить произвольно-сложный процесс в зоне горения к некоторому фиктивному процессу в сечении, разделяющем «холодную» и «горячую» части течения, можно использовать сравнительно простой математический аппарат для исследования процесса возбуждения колебаний. Понимание энергетической стороны рассматриваемого явления полезно не только потому, что вносит ясность в этот запутанный вопрос, но и потому, что позволяет развить энергетический метод решения ряда задач, который в большинстве случаев отличается наглядностью и простотой. Что касается изучения механизмов обратной связи, то оно необходимо как для того, чтобы наметить наиболее простые практические методы воздействия на колебательную систему, так и для того, чтобы дать ее полное теоретическое описание.

Чтобы закончить рассмотрение вопроса о возбуждении колебательной системы, надо найти ее предельный цикл. Соответствующие целлинейные задачи отличаются исключительной сложностью. Поэтому в рассматриваемом ниже случае задача ставится в наиболее простой форме: предполагается, что нелинейности являются сосредоточенными,

т. е. могут проявляться лишь в отдельных сечениях потока газа.

Так как решение совокупности названных задач требует использования результатов, относящихся к различным областям знания (гидромеханика и акустика, теория горения, математический аппарат теории регулирования и колебаний), для описания процесса термического возбуждения колебаний в движущемся газе приходится разрабатывать особый аппарат исследования, могущий представить теоретический интерес и в более широком плане.

ГЛАВА I

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА КОЛЕБАНИЙ, ВОЗБУЖДАЕМЫХ ТЕПЛОПОДВОДОМ

§ 1. Некоторые экспериментальные факты

Хотя пристальное внимание к самовозбуждению акустических колебаний горением (или иной формой теплоподвода) возникло лишь в последние годы, главным образом в связи с развитием ракетной техники и форсированием промышленных топок, факт самовозбуждения колебаний теплоподводом известен уже более ста лет.

Самые различные опыты, поставленные физиками XIX столетия, указывали на возможность возбуждения акустических колебаний горением или иной формой теплоподвода. Здесь достаточно напомнить хотя бы явление «поющих пламен» в трубу Рийке¹⁾, в которой тепло подводится к воздуху при помощи горячей сетки. Остановимся несколько более подробно на описании опытов Рийке. В 1859 г. Рийке обнаружил, что если достаточно длинную и открытую с обоих концов трубу расположить вертикально, а затем поместить в ней на расстоянии около $\frac{1}{4}$ длины трубы от нижнего конца нагретую до ярко-красного каления частую металлическую сетку, то почти непосредственно вслед за удалением газового пламени, нагревавшего сетку, слышен звук значительной силы, длящийся несколько секунд (т. е. в течение всего времени, пока сетка остается горячей). Рийке обнаружил также, что звучание происходит только в том случае, если в трубе образуется сквозная тяга (именно для образования тяги

¹⁾ Стретт Дж. В. (лорд Рэлен). Теория звука, том II, Гос. техиздат, 1955, стр. 221 и далее.

и следует ставить трубу вертикально) и в случае возбуждения слышен звук, соответствующий основному тону трубы. Позже опыты Рийке были изменены в том отношении, что сетка нагревалась от источника электрической энергии, и звучание продолжалось неограниченно долго.

Совершенно иной результат получается, если поместить сетку в верхней половине трубы. В этом случае вызвать звучание основного тона при помощи нагретой сетки оказывается невозможным. Однако видоизменение опыта, предложенное Босша и Риссом, открывает эту возможность. Для этого помещенную в верхней части трубы сетку следует не нагревать, а охлаждать. При этом в нижней части трубы должна располагаться газовая горелка, нагревающая воздух и создающая тягу, а сетка уже не подводит, а отводит тепло от пересекающего ее воздуха.

Из приведенного здесь краткого описания следует, что возбуждение акустических колебаний связано с движением газа по трубе, в одном из сечений которой газовое течение вступает во взаимодействие с некоторым положительным (нагрев) или отрицательным (охлаждение) тепловым источником.]

Описанное явление можно считать наиболее простым процессом термического возбуждения звука. Этот процесс в то же время достаточно близок к представляющему основной интерес вибрационному горению. Несудивительно поэтому, что при рассмотрении ряда задач в последующих главах будут делаться ссылки на опыты Рийке, а один из параграфов главы X будет посвящен изложению теории этого явления.

Несколько позже, тоже во второй половине XIX столетия, Майлар и Ле-Шателье наблюдали при сгорании в трубах переход от плавного движения пламени вдоль трубы к вибрационному горению. Позже аналогичное явление наблюдали и другие авторы. Первыми тщательно поставленными опытами, в которых вибрационное горение было достаточно полно исследовано, явились опыты Коварда, Хартвелла и Джорджсона¹⁾, опубликованные в 1937 г. Основная масса опытов велась в горизонтальных

¹⁾ Coward H. F., Hartwell F. J., Georgeson E. H. M., *ourn. of the Chemical Society*, 1482, 1937.

трубах диаметром 100 и 200 мм и длиной 5 м, наполненных смесью метана и воздуха. Указанные трубы имели один закрытый, а другой открытый конец. После заполнения трубы горючей смесью открытый конец прикрывался, выдерживалось время, необходимое для полного успокоения газа в трубе, затем этот конец трубы осторожно открывался, и горючая смесь поджигалась у открытого конца.

Первоначально пламя перемещалось вдоль трубы спокойно, но по достижении им некоторого расстояния от открытого конца начинались сильные вибрации. Эти вибрации регистрировались у закрытого конца в виде колебаний давления. Кроме того, одновременно производилась фоторегистрация пламени, которая указывала на сильные колебания фронта пламени, происходившие с той же частотой, что и колебания давления у закрытого конца.

Интересным обстоятельством оказалось то, что частота колебаний давления (и пламени) по мере перемещения фронта пламени вдоль трубы, изменялась скачкообразно. Наблюдавшиеся частоты колебаний имели порядок собственных частот газового столба в трубе.

Авторы исследовали также влияния разного рода препятствий, располагавшихся у открытого конца трубы, на характер вибрационного горения. Они постепенно приближали к открытому концу трубы пластину и убедились, что после приближения (для трубы с диаметром 100 мм) пластины на расстоянии 15 мм и меньше, колебания в сильной степени демпфировались. Вибрационное горение практически прекращалось полностью, если у открытого конца трубы помещалась стеклянная вата.

На рис. 1 приведены осциллограммы давления у закрытого конца. Осциллограммы построены в функции времени, началом считается момент поджигания смеси. Вертикальными черточками в правых концах осциллограмм помечены моменты достижения пламенем закрытого конца. Числа, стоящие над кривыми колебания давления, дают частоты записанных колебаний в герцах.

Если сопоставить опыты Рйке с только что описанными опытами Коварда, Хартвелла и Джорджсона, то становится очевидным, что целый ряд признаков объединяет их. Основным является при этом то, что в обоих случаях

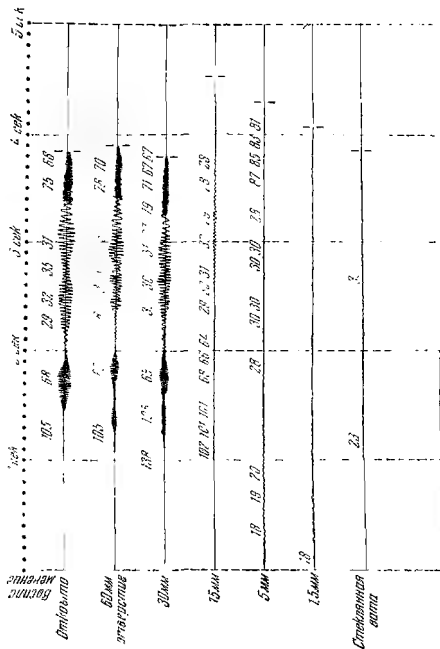


Рис. 1. Осциллограммы давления у закрытого конца трубы, полученные в опытах Коварда, Хартвелла и Джорджсона.

возбуждаются собственные гармоники длинных труб, причем это возбуждение происходит в результате теплоподвода.

В последние 10—15 лет вибрационное горение стали наблюдать не только в опытах академического типа, наподобие описанных выше, но и в двигателях и тонках. При этом оказалось, что в подобных устройствах могут

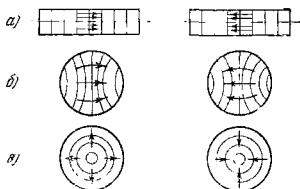


Рис. 2. Возможные типы акустических колебаний газовых масс в жидкостном реактивном двигателе.

возникать акустические колебания разных типов. Покажем это на примере жидкостных реактивных двигателей.

В периодической литературе приведены многочисленные исследования, связанные с наблюдаемым в жидкостных реактивных двигателях самовозбуждением акустических колебаний. Оказалось, что в зависимости от конкретных условий могут возбуждаться два типа колебаний — продольные и поперечные. Поперечные колебания в свою очередь могут быть поделены на тангенциальные и радиальные. Эти три типа акустических колебаний отличаются формой стоячих волн, возникающих при их реализации в камере сгорания.

На рис. 2 приведены соответствующие схемы. На схеме а показаны продольные акустические колебания. Прямыми без стрелок даны линии равных значений мгновенных давлений, стрелками показано движение газовых масс, слева — в момент, когда эти массы движутся вправо, а справа — через полпериода (на схеме приведена

лишь колебательная составляющая скорости). При этих колебаниях воздушные массы движутся вдоль оси симметрии камеры сгорания, так что пульсационная составляющая скорости складывается со средней скоростью течения газовых масс вдоль камеры. На схеме б показаны тангенциальные колебания. Они во многом подобны продольным, но происходят в поперечном направлении камеры сгорания. При этом, в силу того, что поперечное сечение камеры является кругом, линии равных давлений перестают быть прямыми. На схеме в даны радиальные колебания. Последний вид колебаний обладает осевой симметрией, причем осью симметрии является ось камеры сгорания.

Если вспомнить, что частота акустических колебаний связана с расстоянием, которое должен преодолеть акустический импульс, и, кроме того, учесть, что длина камеры сгорания обычно много больше ее диаметра, то легко сообразить, что наиболее низкой частотой колебаний будут характеризоваться продольные колебания, среднее положение будут занимать тангенциальные, а наиболее высокая частота будет свойственна радиальным колебаниям.

Сравнивая описанные здесь три типа акустических колебаний с опытами Коварда, Хартвелла и Джорджсона и звучанием трубы Рийке, легко видеть, что лишь продольные колебания в камере сгорания жидкостного реактивного двигателя имеют много общего с этими экспериментами. Точно так же продольными акустическими колебаниями оказались пульсации давления, наблюдавшиеся в пылеугольных топках, прямооточных воздушно-реактивных двигателях, ряде опытных установок при академических исследованиях процессов горения и т. п. Таким образом, продольные акустические колебания представляют значительный интерес, выходящий за рамки какой либо одной узкой проблемы.

Настоящая книга посвящена исследованию одних лишь продольных акустических колебаний, причем предпочтение отдавалось вопросам, не связанным с рабочим процессом в жидкостных реактивных двигателях. Это делалось главным образом потому, что вопросам колебаний (в том числе и продольных) в камерах сгорания жидкостных реактив-

ных двигателей посвящена недавно вышедшая на русском языке монография Л. Крокко и Чжен Синь-и¹⁾.

Что касается поперечных акустических колебаний, то они изучены к настоящему времени еще недостаточно полно. Ознакомление с ними наиболее целесообразно вести по статьям, появляющимся в периодических изданиях. Ряд положений, обсуждаемых в настоящей книге, может оказаться полезным и при разработке теории поперечных колебаний, поскольку и в том и в другом случае существо явления сводится к самовозбуждению акустических колебаний теплоподводом.

§ 2. Схема идеализации процесса самовозбуждения продольных акустических колебаний горением

Для теоретического исследования продольных акустических колебаний в опытных установках, двигателях или топках надо задаться некоторой идеализированной схемой. При теоретическом анализе рассматриваемого явления будем считать, что все перечисленные выше устройства допускают сведение их к длинной цилиндрической трубе, которую можно разбить на ряд участков, разделенных короткими зонами, внутри которых происходит процесс теплоподвода. Движущийся по этим участкам газ (воздух или продукты сгорания) в отсутствии колебаний не претерпевает никаких изменений. Обычно достаточно рассмотреть два таких участка — один, соответствующий подводящему трубопроводу, а другой — камере сгорания. На первом из названных участков не будет учитываться возможное изменение проходных сечений, наличие гидравлических потерь, изменение состава газа вследствие введения в поток горючего и т. п. На втором участке не учитывается догорание и смешение газов в части камеры сгорания, прилегающей к выходному соплу, а также гидравлические потери, потери тепла, связанные с теплоотводом через стенки камеры сгорания, и т. п.

Процесс горения в принятом здесь представлении осуществляется в одной или нескольких областях малой про-

¹⁾ Крокко Луиджи и Чжен Синь-и, Теория неустойчивости горения в жидкостных реактивных двигателях, ИЛ, Москва, 1958.

тяженности. Эту малость областей горения следует понимать как малость по сравнению с длинами волн продольных колебаний, а следовательно, и по сравнению с общей длиной трубы (установки). С целью упрощения постановки задачи будем пренебрегать протяженностью зон горения, заменив эти области поверхностями сильных разрывов.

Таким образом, теоретическая расчетная схема соответствует одномерному газовому течению в цилиндрической трубе, разделенному в общем случае одной или несколькими поверхностями сильных разрывов. Свойства поверхности разрыва Σ существенно зависят от процесса горения в той области, которую эта поверхность представляет. Эти существенные свойства можно сформулировать лишь отказавшись от упрощенного одномерного рассмотрения процессов, идущих в зоне горения.

Поэтому при рассмотрении процесса распространения возмущений между поверхностями разрывов будет использоваться одномерная схема, а при формулировании свойств поверхности разрыва — трехмерная схема явления. Характеризуя свойства зоны теплоподвода, будем, как правило, пренебрегать гидравлическими сопротивлениями и изменением агрегатного состояния топлива при горении. (Примеры процессов, когда этого делать нельзя, приведены в последней, десятой главе.) Поверхности разрыва могут вводиться не только для описания процесса горения, но и в других случаях, когда параметры течения претерпевают сильное изменение на коротком участке.

Понимая свойств поверхности Σ , разделяющей течение на два участка, следует определить свойства течения на концах трубы. В зависимости от рода подлежащей исследованию задачи краевые условия приобретают тот или иной вид. В одном случае это будут обычные акустические условия, в другом — условия, характеризующие идеализированные свойства сопла Лаваля или аналогичных устройств.

Так как основным содержанием последующих глав является исследование колебательных процессов, имеющих акустическую природу, ниже будет применяться метод малых возмущений. Основной задачей исследования является, как правило, изучение устойчивости газового течения в трубе описанного типа по отношению к малым возмущениям. Если процесс в идеализированной схеме окажется

колебательно-неустойчивым, то будет сделано естественное предложение, что подобная неустойчивость приводит к автоколебаниям.

Как известно, для полного решения задачи об автоколебаниях требуется учет существенно нелинейных зависимостей. Задача такого рода рассматривается в главе VIII. Главным упрощающим предположением служит допущение, что все существенно нелинейные зависимости содержатся в свойствах поверхности разрыва Σ . Что касается процессов распространения возмущений между поверхностью разрыва и концами трубы, то будет предполагаться, что эти процессы достаточно хорошо описываются линейными уравнениями и на режиме установившихся автоколебаний.

Рассматриваемые ниже автоколебания акустического типа можно охарактеризовать как вызванные наличием обратной связи. В случае возбуждения автоколебаний процессом горения (вибрационное горение) обратная связь будет приводить к влиянию акустических колебаний на процесс горения. Поэтому в специальной главе будет рассмотрен целый ряд физических явлений, приводящих к замыканию подобной обратной связи. Однако в большинстве теоретических расчетов обратная связь не конкретизируется, а вводится чисто формально, как зависимость существенного параметра в зоне горения (ча поверхности разрыва Σ) от величины колебательной составляющей скорости или давления.

Прежде чем переходить к систематическому изложению предмета, полезно сделать ряд предварительных замечаний, имеющих отношение к методу изложения, принятому в последующих главах.

Ниже будут различаться режимы колебаний, характеризующиеся возрастанием амплитуды некоторой величины δ со временем t , постоянством амплитуды и, наконец, убыванием ее. Эти три случая изображены на рис. 3 (а, б и в). Первый случай является примером неустойчивого, последний — устойчивого, а средний — нейтрального процесса.

При изменении какого-либо существенного параметра колебательная система может из устойчивой превратиться в неустойчивую и наоборот. Всюду будет делаться предположение, что при таких переходах (если они совершаются

непрерывно), колебательная система обязательно пройдет через режим нейтральных колебаний. Этот режим часто называется границей устойчивости.

Обычно задачей теоретического анализа является нахождение границы устойчивости. Зная эту границу, условие

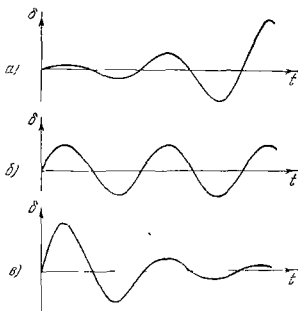


Рис. 3. Неустойчивые, нейтральные и затухающие колебания.

устойчивости системы можно сформулировать в виде некоторого неравенства, что весьма удобно для практики. Исследование режима нейтральных колебаний оказывается обычно проще исследования режимов с изменяющимися амплитудами. Это связано с тем, что при нейтральных колебаниях изменения перемещений синусоидальны.

Здесь следует указать, что не всякий режим с постоянными амплитудами колебаний является нейтральным и соответствует границе устойчивости. Тем же свойством обладает и режим установившихся автоколебаний, хотя он соответствует области неустойчивости. Однако в отличие от нейтральных колебаний автоколебания описываются нелинейными системами уравнений и сам факт анализа нелинейной системы в дальнейшем изложении будет особо оговариваться.

Известная трудность возникает при сравнении опытных данных с теоретическими расчетами. Дело в том, что если в опыте установилась некоторая частота и амплитуда колебаний, то это практически всегда означает, что в системе возникли автоколебания, т. е. явление, описываемое нелинейными соотношениями. В то же время измерения в этих опытах частоты и даже относительные амплитуды колебаний будут нередко сравниваться с теоретическими соотношениями, справедливыми лишь для линейных процессов. Такое упрощение возможно потому, что рассматриваемый ниже тип автоколебаний близок по своему характеру к малым колебаниям, описываемым линейными системами уравнений.

Достаточно полное представление о процессе колебаний можно получить, имея кривые изменения всех переменных в функции времени. На рис. 4 показан соответствующий пример. Здесь δv , δp , δQ — возмущения скорости,

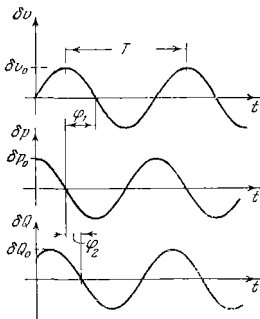


Рис. 4. Зависимости колебательных составляющих параметров течения от времени.

давления и теплоподвода соответственно. Имея приведенный график, можно судить о периоде колебаний T , амплитудах колебаний δv_0 , δp_0 и δQ_0 и о фазовых сдвигах между приведенными переменными. Так, если сравнивать фазы других колебаний с фазами колебания давления δp , то фаза δv будет отличаться от фазы δp на φ_1 , а фаза δQ на φ_2 .

В тех случаях, когда частота колебаний (или однозначно связанный с нею период колебаний) особого интереса не представляет, а существенными являются относительные амплитуды колебаний отдельных переменных и их взаимные фазовые сдвиги (иначе говоря, нужны только амплитудно-фазовые соотношения), можно применить более наглядный

способ графического изображения режима колебаний. Он представлен на рис. 5, где изображен тот же процесс, что и на рис. 4. Как видно из рис. 5, указанный способ сводится к построению векторной диаграммы. Каждая переменная изображается в виде вектора, длина которого равна амплитуде колебаний, а углы между векторами равны фазовым сдвигам между переменными. Если мысленно скрепить эти векторы между собою и придать им общее вращение вокруг центра O с частотой ω , то, наблюдая

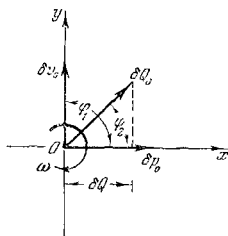


Рис. 5. Векторная диаграмма процесса, изображенного на рис. 4.

за проекциями векторов на некоторое направление, например на ось x , можно получить синусоидальное изменение перемещений во времени, с заданными амплитудами и фазовыми сдвигами. Положение векторов на рис. 5 соответствует моменту времени $t = 0$ на рис. 4; путем вращения совокупности изображенных векторов по часовой стрелке можно получить значения δv , δp и δQ во все последующие моменты времени.

В тесной связи с последним способом изображения процесса колебаний стоит вопрос о способе аналитической записи соответствующих выражений. Переменную величину, имеющую амплитуду и фазу, можно изобразить в виде вектора. Аналитически вектор можно записывать, пользуясь методами векторного анализа или плоскостью комплексного переменного. В дальнейшем изложении будут использованы оба эти способа записи переменных. При этом надо всегда иметь в виду, что если сумма или разность двух комплексных чисел вполне может быть заменена суммой или разностью соответствующих векторов, то этого, как известно, нельзя сказать об их произведении. Следовательно, особую осторожность надо проявлять тогда, когда приходится рассматривать произведение перемещений или произведение переменного на некоторый коэффициент, если последний изменяет не только величину, но и фазу.

Ниже будут использованы три способа записи переменных, которые лучше пояснить на примере. Пусть рассматривается изменение двух переменных x и y :

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 e^{v\tau} \cos(\omega\tau + \varphi), \\ y &= y_0 e^{v\tau} \cos(\omega\tau + \psi). \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Из приведенных выражений видно, что рассматриваются две переменные, одинаково изменяющиеся во времени, но имеющие разные начальные амплитуды (x_0 и y_0) и разные начальные фазы (φ и ψ).

Запись изменится следующим образом, если использовать комплексные числа:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 e^{(v + i\omega)\tau}, \\ y &= y_0 e^{(v + i\omega)\tau}. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Теперь x и y являются комплексными числами, и чтобы получить такое же изменение переменных, как в формулах (2.1), надо условиться считать, что физический смысл имеют лишь вещественные части x и y . Это не значит, конечно, что мнимые слагаемые x и y вводятся «зря». Действительно, пусть

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= a_x + ib_x, \\ y_0 &= a_y + ib_y. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Тогда начальные амплитуды $|x_0| = \sqrt{a_x^2 + b_x^2}$ и $|y_0| = \sqrt{a_y^2 + b_y^2}$, а начальные фазы будут $\varphi = \arctg \frac{b_x}{a_x}$; $\psi = \arctg \frac{b_y}{a_y}$.

Следовательно, комплексные начальные амплитуды x_0 и y_0 определяют и начальные амплитуды и начальные фазы переменных. В этом их существенное отличие от x_0 и y_0 в равенствах (2.1). Преимуществом записи переменных в форме (2.2) является то, что зависимость от времени выделена в отдельный множитель $\exp(v + i\omega)\tau$, который одинаков для обоих переменных, в то время как в записи (2.1) эти зависимости были различными в силу того, что включали начальные фазы φ и ψ . Кроме того, множитель $\exp(v + i\omega)\tau$ никогда не обращается

в нуль. Приведенные здесь соображения делают запись вида (2.2) предпочтительной, и ниже будет в основном использован этот способ записи переменных.

В тех случаях, когда зависимость переменных от времени интереса не представляет, а главным является соотношение между амплитудами и фазами переменных x и y , можно для характеристики этих соотношений использовать комплексные амплитуды x_0 и y_0 .

Действительно, умножение x_0 и y_0 на зависящий от времени множитель $\exp(v + i\omega)\tau$, хотя и изменяет амплитуды и фазы x и y , но не изменяет отношения $|x|/|y|$ и разности фаз, которая продолжает оставаться равной $\varphi - \psi$.

Таким образом, в указанных случаях можно использовать комплексные амплитуды x_0 и y_0 вместо x и y , причем время начала отсчета $\tau = 0$ назначить так, как это удобно по существу задачи. Поясним это на примере. Пусть, например, требуется, чтобы начальная амплитуда x'_0 была вещественной величиной. Этому соответствует момент времени $\tau = \tau_0$, определяемый равенством

$$a_x e^{v\tau_0} \sin \omega\tau_0 + b_x e^{v\tau_0} \cos \omega\tau_0 = 0.$$

Если ввести теперь новую шкалу времени τ' так, чтобы выполнялось равенство $\tau = \tau' + \tau_0$ и новые начальные амплитуды, то вместо равенств (2.2) можно написать:

$$\left. \begin{aligned} x &= x'_0 e^{(v + i\omega)\tau'}, \\ y &= y'_0 e^{(v + i\omega)\tau'}, \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

где

$$\left. \begin{aligned} x'_0 &= x_0 e^{(v + i\omega)\tau_0}, \\ y'_0 &= y_0 e^{(v + i\omega)\tau_0}. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Записи (2.2) и (2.3) совершенно эквивалентны по существу и одинаковы по форме, но начала отсчета времени в них отличаются на τ_0 , причем в записи (2.3) удовлетворяется условие, чтобы в момент $\tau' = 0$ x было вещественной величиной. Таким образом, должным выбором отсчета времени можно выполнить некоторые требо-

вания о начальном положении вектора x в комплексной плоскости.

В тех случаях, когда изменение переменных во времени интереса не представляет, можно для суждения об относительных амплитудах и разностях фаз пользоваться не только комплексными амплитудами x_0 и y_0 , но и векторами x_0 и y_0 .

Такой способ записи переменных имеет известные преимущества. Пусть, например, по существу рассматриваемой задачи надо написать, что сдвиг по фазе между x_0 и y_0 равен $\frac{\pi}{2}$. Наиболее простой эта запись получится, если вместо x_0 и y_0 ввести векторы x_0 и y_0 и приравнять их скалярное произведение нулю:

$$x_0 y_0 = 0.$$

Другой пример. Надо вычислить величину

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} x y d\tau, \quad (2.5)$$

причем x и y предполагаются записанными в виде (2.1) для $v=0$. Легко убедиться, что эта величина равна

$$\frac{1}{2} x_0 y_0 \cos(\varphi - \psi).$$

Следовательно,

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} x y d\tau = \frac{1}{2} x_0 y_0,$$

т. е. векторная запись переменных может оказаться и в этом случае весьма полезной.

В дальнейшем в настоящей книге будут использованы все три формы записи переменных: (2.1), (2.2) и векторная. Выбор того или иного способа всецело зависит от существа рассматриваемой задачи и обычно не оговаривается специально. Следует лишь подчеркнуть, что в тех

случаях, когда производится рассмотрение нелинейных соотношений [задача об автоколебаниях, составление выражений вида (2.5) и т. п.], комплексные переменные, соответствующие записи типа (2.2),^{*} использованы быть не могут. Это связано с тем, что вещественная часть произведения xu [где x и u комплексные величины, записанные в форме (2.2)] и произведение xu , вычисленное для (2.1), не равны друг другу. В связи с этим комплексная форма записи переменных будет применяться только в линейных задачах.

ГЛАВА II

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В ДВИЖУЩЕМСЯ ГАЗЕ

§ 3. Линеаризация уравнений гидромеханики

При изучении процессов, связанных с возбуждением акустических колебаний путем подвода тепла к движущемуся газу, нельзя пользоваться обычными уравнениями акустики. Это связано с тем, что уравнения акустики получают, предполагая, во-первых, отсутствие какого-либо движения среды (воздуха) кроме движения, непосредственно связанного с распространением звуковых волн, и, во-вторых, считая среду изоэнтропичной. Необходимые для исследования исходные уравнения получим путем линеаризации уравнений гидромеханики сжимаемой жидкости и термодинамики. Этот путь вполне естествен, поскольку звуковые колебания можно определить как колебательные движения в сжимаемой жидкости¹⁾, характеризующиеся малыми амплитудами.

Как уже говорилось, в дальнейшем будут рассматриваться только продольные колебания в достаточно длинных цилиндрических трубах. (Длинными трубами будем считать такие, у которых диаметр мал по сравнению с длиной трубы.) Это условие позволяет опускать детальный анализ сложных явлений, имеющих место на концах трубы, и заменить их некоторым интегральным эффектом в том виде, в каком он проявляется при некотором удалении от конца. Если, кроме того, условиться рассматривать лишь низкие частоты акустических колебаний (такие, для которых длина волны велика по сравнению

¹⁾ Нигде не будет делаться разницы между терминами жидкость, сжимаемая жидкость и газ.

с диаметром трубы), то можно считать, что вдоль каждого поперечного сечения трубы все величины (скорости, давления и т. п.) постоянны, а направление распространения волн возмущений совпадает с направлением оси трубы. Конечно, понятия достаточно длинной трубы и достаточно низкой частоты колебаний довольно неопределенны и степень выполнения этих условий нужно оценивать в каждом конкретном случае, исходя из физической сущности рассматриваемого явления и из требований, предъявляемых к теоретическому анализу. В зависимости от того, должна ли теория дать точные количественные результаты или только указать на качественную сторону явления, эти ограничения могут изменяться в широких пределах. Здесь существенно лишь то, что в случае справедливости принятых допущений можно ограничиться рассмотрением задачи в одномерной постановке.

Сделаем естественное предположение, что и основное течение в длинной цилиндрической трубе, на которое оказались наложенными малые возмущения, также может рассматриваться как одномерное. Будем считать газ идеальным (не вязким и не теплопроводным). Запишем основные уравнения одномерной гидромеханики, направив ось x вдоль оси трубы

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} - \rho \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial s}{\partial t} + v \frac{\partial s}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Здесь t — время, v — скорость течения, p — давление, ρ — плотность текущей среды, s — энтропия.

Первое из этих уравнений является, как известно, уравнением движения жидкости (уравнение Эйлера), второе уравнением — неразрывности и третье — условием сохранения энтропии частицы.

В силу предположения об идеальности газа энтропия любой его элементарной частицы не может измениться при движении по трубе в пределах тех участков трубы, в которых отсутствует теплоподвод. Это следует из того, что

Идеальность газа означает отсутствие вязкости и теплопроводности. Отсутствие теплопроводности приводит к тому, что температуры соседних объемов, нагретых неодинаково, не могут постепенно выравниваться. Отсутствие же вязкости не позволяет механической энергии течения переходить в тепловую форму и тем самым изменять энтропию.

Таким образом, энтропия s каждого элемента движущегося по трубе газа будет оставаться постоянной, хотя соседние элементы и могут иметь разную энтропию. Это справедливо, конечно, для движения газа по участкам трубы, в которых газ не подвергается внешним воздействиям (телоподводу и т. п.). Математическим выражением этого и является третье из уравнений (3.1).

Допустимость использования предположения об идеальности газа для получения исходной системы уравнений (3.1) не является очевидной. Строго говоря, следовало бы показать, что пренебрежение вязкостью и теплопроводностью не вносит существенной ошибки в результаты анализа. Здесь этот вопрос не будет рассматриваться более подробно. Следует лишь указать, что более тщательный анализ, произведенный Мерком¹⁾, по сути подтверждает справедливость такого допущения. Им было показано, что учет вязкости и теплопроводности лишь незначительно искажает картину малых колебаний в ближайшей окрестности зоны теплоподвода и не сказывается сколько-нибудь существенным образом на концах трубы, т. е. в сечениях, для которых записываются краевые условия. Влияние вязкости и теплопроводности на изменение энтропии должно быть более существенным. Однако в дальнейшем изложении поток энтропии и его возмущения почти не будут играть роли при анализе процесса возбуждения акустических колебаний.

Три уравнения (3.1) содержат четыре переменных: v , p , q и s . Легко заметить, что эти переменные не являются независимыми. Связь между тремя последними дается термодинамическим соотношением

$$s = c_v \ln p - c_p \ln q, \quad (3.2)$$

¹⁾ Merk H. J., Analysis of heat-driven oscillations of gas flows, Appl. Scient. Res., 1957, A6, № 4.

где c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме; c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении.

Исключив при помощи соотношения (3.2) одну из переменных из системы уравнений (3.1), можно свести число переменных к трем. Это, однако, удобнее сделать после линеаризации уравнений.

Будем рассматривать некоторый установившийся процесс течения газа по цилиндрической трубе. Исключим из рассмотрения участки теплоподвода. Тогда в силу сделанных выше предположений во всех сечениях между участками теплоподвода и в каждой точке этих сечений скорость газа, его плотность, давление и энтропия будут одинаковы. Обозначим их v_0 , ϱ_0 , p_0 и s_0 . Пусть на установившееся течение накладываются слабые возмущения параметров течения δv , δp , $\delta \varrho$ и δs . Эти возмущения будут, конечно, одинаковыми для всех точек рассматриваемого сечения, но могут быть разными для соседних сечений. В этом их существенное отличие от v_0 , ϱ_0 , p_0 и s_0 , постоянных для всех сечений. Таким образом, для возмущенного течения можно написать:

$$\left. \begin{aligned} v &= v_0 + \delta v, & p &= p_0 + \delta p, \\ \varrho &= \varrho_0 + \delta \varrho, & s &= s_0 + \delta s. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Подставив выражения (3.3) в уравнения (3.1) и (3.2), отбросим величины высших порядков малости и учтем свойства установившегося течения. Это позволит получить уравнения, линейные относительно δv , $\delta \varrho$, δp и δs . Покажем этот процесс на примере первого уравнения (3.1). Подставив значения v , ϱ и p из (3.3) в уравнение движения, получим:

$$\frac{\partial (v_0 + \delta v)}{\partial t} + (v_0 + \delta v) \frac{\partial (v_0 + \delta v)}{\partial x} + \frac{1}{\varrho_0 + \delta \varrho} \frac{\partial (p_0 + \delta p)}{\partial x} = 0.$$

Если учесть, что в силу указанных выше свойств установившегося течения $\frac{\partial v_0}{\partial t} \equiv 0$, $\frac{\partial v_0}{\partial x} \equiv 0$; $\frac{\partial p_0}{\partial x} = 0$, написанное уравнение может быть приведено к следующему виду:

$$\frac{\partial \delta v}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \delta v \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial \delta p}{\partial x} - \frac{\delta \varrho}{\varrho_0^2} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial \delta p}{\partial x} = 0.$$

При написании этого равенства была использована известная формула, справедливая для $z \ll 1$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + \varepsilon,$$

где ε — величина высшего порядка малости относительно z . Применительно к рассматриваемому случаю $\delta q \ll q_0$ это дает

$$\frac{1}{q_0 + \delta q} = \frac{1}{q_0} - \frac{\delta q}{q_0^2} + \varepsilon.$$

Возвращаясь к предыдущему равенству, заметим, что слагаемые $\delta v \frac{\partial \delta v}{\partial x}$; $\frac{\delta q}{q_0^2} \frac{\partial \delta p}{\partial x}$ и $\varepsilon \frac{\partial \delta p}{\partial x}$ являются членами высшего порядка малости по сравнению с тремя другими слагаемыми полученного равенства (при этом предполагается, что производные от возмущений имеют тот же порядок малости, что и сами возмущения). Отбрасывая эти малые слагаемые, запишем уравнение Эйлера в следующей форме:

$$\frac{\partial \delta v}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{1}{q_0} \frac{\partial \delta p}{\partial x} = 0.$$

Поскольку v_0 и q_0 постоянны, это уравнение является линейным относительно переменных. В этом смысле оно существенно проще исходного уравнения движения (3.1). Однако эта простота достигнута за счет сильного сужения области применимости нового уравнения. Если уравнение в исходной форме (3.1) применимо ко всяким одномерным течениям идеальной жидкости, то в новой форме оно справедливо лишь для течений, мало отклоняющихся от стационарных. Использование в настоящей книге линейризованных зависимостей вместо точных является вполне оправданным, так как акустические колебания характеризуются малыми амплитудами.

Пропишем линейризацию второго и третьего уравнений системы (3.1), а также уравнения (3.2), получим следующую исходную систему уравнений возмущенного

Движения газового потока:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \delta v}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial \delta p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \delta \varrho}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \delta \varrho}{\partial x} + \varrho_0 \frac{\partial \delta v}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \delta s}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \delta s}{\partial x} &= 0, \\ \delta s + c_p \frac{\delta \varrho}{\varrho_0} - c_v \frac{\delta p}{p_0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Относительно этой системы следует сделать одно замечание. В результате линеаризации уравнений (3.1) и (3.2) переменные v , ϱ , p и s заменены вариациями этих переменных δv , $\delta \varrho$, δp и δs . Произведенные при линеаризации выкладки существенно опирались на предположение о малости δv , $\delta \varrho$, δp и δs . Но если говорить о малости какой-либо величины, то всегда надо указывать, по сравнению с какой другой величиной ее следует считать малой. Глядя на равенства (3.3), можно подумать, что имелась в виду малость по сравнению с v_0 , ϱ_0 , p_0 и s_0 . Однако это не совсем так. Действительно, в неподвижной среде $v_0 = 0$ и в этом частном случае сколь угодно малое δv нельзя считать малым по сравнению с v_0 . Аналогичные соображения можно привести и относительно δs . Как известно из термодинамики, начало отсчета энтропии можно назначать произвольно. Взяв его равным s_0 , сразу получаем $s_0 = 0$ и, следовательно, отклонения энтропии δs нельзя считать малыми по сравнению с s_0 . Лишь о $\delta \varrho$ и δp можно говорить, что они малы по сравнению с ϱ_0 и p_0 , поскольку переход от уравнения (3.2) к линеаризованной форме, приведенной в последней строке системы (3.4), возможен только при конечных значениях p_0 и ϱ_0 .

Когда говорится о малости вариаций переменных δv , $\delta \varrho$, δp и δs , то имелось в виду только то обстоятельство, что квадратами и произведениями этих вариаций и их производных можно пренебрегать по сравнению с линейными членами. (Это не значит, конечно, что у названных переменных нет естественных масштабов малости, такие масштабы будут приведены в следующем параграфе.)

§ 4. Акустические волны в движущемся непозэнтропическом газе

Система уравнений (3.4) может быть упрощена путем исключения одной из переменных при помощи конечного соотношения, приведенного в последней строке. Выразив $\delta\rho$ из четвертого уравнения и подставив его во второе, получим равенство

$$\frac{c_v}{c_p} \frac{Q_0}{p_0} \left(\frac{\partial \delta p}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \delta p}{\partial x} \right) - \frac{Q_0}{c_p} \left(\frac{\partial \delta s}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \delta s}{\partial x} \right) + Q_0 \frac{\partial \delta v}{\partial x} = 0,$$

второе слагаемое в левой части которого равно нулю в силу третьего уравнения системы (3.4). Множитель при первом слагаемом равен $\frac{c_v}{c_p} \frac{Q_0}{p_0} = \frac{1}{a^2}$, где a — скорость звука в невозмущенном течении. Это следует из известных термодинамических соотношений:

$$p = QRT, \quad (4.1)$$

$$a = \sqrt{\kappa RT}, \quad (4.2)$$

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} \quad (4.3)$$

(газовая постоянная R здесь отнесена к единице массы, а не веса).

Таким образом, после исключения $\delta\rho$ системе (3.4) можно придать следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \delta v}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{1}{Q_0} \frac{\partial \delta p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \delta p}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \delta p}{\partial x} + a^2 Q_0 \frac{\partial \delta v}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \delta s}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \delta s}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Особенностью полученной системы является то, что вследствие выбора в качестве зависимых переменных нелинии δv , δp и δs первые два уравнения могут быть проинтегрированы отдельно от третьего. Это обстоятельство заметно упрощает вычисления. Физический смысл этого отделения третьего уравнения от первых двух сводится к тому, что акустические волны давления и скорости распространяются независимо от «тепловых» волн

энтропии. Казалось бы, что на этом основании можно было бы вообще ограничиться рассмотрением системы из первых двух уравнений. Однако в общем случае это не так. Дело в том, что при написании краевых условий или при формулировании закономерностей процесса теплоподвода величины δp и δv могут оказаться связанными с δs и тогда третье уравнение системы будет играть важную роль.

Система уравнений (4.4) не является, однако, наиболее простой из всех возможных. Действительно, если ввести переменные

$$\left. \begin{aligned} u &= a v_0 \delta v + \delta p, \\ w &= a v_0 \delta v - \delta p \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

и, выразив из этих равенств δv и δp , подставить их в первые два уравнения (4.4), а затем взять почленную сумму и разность полученных уравнений, то система (4.4) принимает следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (v_0 + a) \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + (v_0 - a) \frac{\partial w}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \delta s}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \delta s}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Здесь уже каждое из трех уравнений интегрируется отдельно от остальных. При этом все три уравнения совершенно однородны и поэтому достаточно проинтегрировать любое из них. Рассмотрим для определенности третье уравнение. Общим решением его является, как известно, выражение

$$\delta s = F(x - v_0 t), \quad (4.7)$$

где F — произвольная дифференцируемая функция.

Выясним смысл полученного решения. Из написанного выражения видно, что δs изменяется, вообще говоря, как при изменении x , так и при изменении t . Однако для моментов времени t и координат x , удовлетворяющих условию

$$x - v_0 t = \text{const},$$

величина δs будет оставаться постоянной. Пусть для момента времени $t = 0$ δs есть некоторая заданная функция x . Эту зависимость можно наглядно представить себе в виде мгновенной фотографии некоторой «волны» δs . Рассмотрим движение «гребня» этой волны (сечения, где δs имеет наибольшее значение), предположив что этот «гребень» существует. Если в момент времени $t = 0$ «гребень» имел координату x_1 , то соответствующее ему сечение (т. е. сечение, в котором F достигает максимума) будет перемещаться согласно сказанному выше по закону

$$x = x_1 + v_0 t.$$

Буквально то же самое можно сказать и о всех других точках «волны». Следовательно, найденное решение (4.7) описывает движение волны δs без изменения ее формы в положительном направлении оси x со скоростью v_0 .

Приведенные здесь формальные выкладки соответствуют совершенно очевидному физическому явлению — поскольку энтропия элементарного объема газа не может измениться (напомним, что рассматривается идеальная сжимаемая жидкость), то она будет перемещаться вдоль оси течения вместе с несущим ее объемом, т. е. со скоростью течения.

Совершенно аналогичные рассуждения можно применить и к первым двум уравнениям системы (4.6) с той лишь разницей, что волны u и w распространяются со скоростями $v_0 + a$ и $v_0 - a$ соответственно. Таким образом, волны u движутся только вправо, а волны w только влево. Эти волны могут интерпретироваться как волны акустических импульсов, движущихся по потоку (со скоростью потока плюс скорость звука) и против потока (со скоростью потока минус скорость звука)¹⁾.

Введенные чисто формально переменные u и w имеют, следовательно, глубокий физический смысл. Правда, в известном смысле эти переменные менее наглядны,

¹⁾ Если рассмотреть характер изменения δp и δv в случаях $u \neq 0$; $w = 0$ или $u = 0$; $w \neq 0$, т. е. при существовании только волны u или только волны w , то легко получить соотношение $\delta p = \pm \rho a \delta v$, широко известное в акустике для плоской бегущей волны.

чем δp и δv , и их непосредственное измерение при эксперименте невозможно, однако они оказываются весьма удобными при решении ряда задач. Ниже будут использованы обе формы записи исходных уравнений [(4.4) и (4.6)].

Введем систему безразмерных переменных при помощи следующих равенств:

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{\delta v}{a}; & p &= \frac{\delta p}{\kappa p_0}; & \bar{q} &= \frac{\delta q}{q_0}; & \bar{s} &= \frac{\delta s}{c_p}; \\ \bar{u} &= \frac{u}{a^2 q_0}; & \bar{w} &= \frac{w}{a^2 q_0}; & \tau &= t \frac{a}{L}; & \xi &= \frac{x}{L}. \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

Здесь κ — показатель адиабаты, а L — некоторый характерный линейный размер, например длина трубы.

Связь между переменными p , v и u , w , а также $\bar{s}$, $\bar{p}$ и $\bar{q}$ выражается простыми формулами:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= \bar{v} + \bar{p}, & \bar{w} &= \bar{v} - \bar{p}, & \bar{p} &= \frac{\bar{u} - \bar{w}}{2}, & v &= \frac{\bar{u} + \bar{w}}{2}, \\ & & \bar{s} &= \bar{p} - \bar{q}. \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

Последняя формула приведена здесь для полноты и является следствием четвертого уравнения системы (3.4).

После введения безразмерных переменных системы уравнений (4.4) и (4.6) примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau} + M \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} + \frac{\partial p}{\partial \xi} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial \tau} + M \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{s}}{\partial \tau} + M \frac{\partial \bar{s}}{\partial \xi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} + (M + 1) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial \tau} + (M - 1) \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{s}}{\partial \tau} + M \frac{\partial \bar{s}}{\partial \xi} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Здесь M - отношение скорости невозмущенного течения к скорости звука в нем.

Коэффициенты обеих систем зависят только от числа M . Это указывает на существенное значение названного параметра в рассматриваемой задаче.

Будем искать решение системы (4.11). Повторив дословно все то, что было сказано относительно решения системы (4.6), можно утверждать, что трем уравнениям (4.11) соответствуют три произвольные волны u , w и $\bar{s}$, движущиеся с безразмерными скоростями $(M+1)$, $(M-1)$ и M .

Будем искать частное решение уравнений (4.11), предполагая, что произвольная функция F является показательной.

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} = F_u [\xi - (M+1)\tau] &= A_u \exp \left[\beta \left(\tau - \frac{1}{M+1} \xi \right) \right], \\ w = F_w [\xi - (M-1)\tau] &= A_w \exp \left[\beta \left(\tau - \frac{1}{M-1} \xi \right) \right], \\ \bar{s} = F_s [\xi - M\tau] &= A_s \exp \left[\beta \left(\tau - \frac{1}{M} \xi \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

Для удобства последующих выкладок в правых частях равенств (4.12) несколько изменена форма записи аргументов.

Числа A_u , A_w , A_s и β , стоящие в правых частях равенств, остаются пока неопределенными. Здесь следует сделать замечание относительно β . Вообще говоря, значения β могут быть различными для каждой из трех переменных, поскольку интегрируемая система (4.11) фактически распалась на три независимых уравнения. Однако в дальнейшем рассматриваться будут только такие случаи, когда связывающие эти три переменные краевые условия потребуют одинаковых величин β во всех трех показательных функциях.

Проиллюстрируем это примером. Пусть на конце трубы нет колебаний давления (это соответствует обычному краевому условию для открытого конца, если пренебрегать излучением звука из трубы). Поместив в это конечное сечение начало координат, получим краевое условие

$\bar{p} = 0$ при $\xi = 0$. Переходя к функциям $\bar{u}$, $\bar{w}$ (4.9), запишем это условие в виде $\bar{u} = \bar{w}$ при $\xi = 0$. Теперь на основании формулы (4.12) будем иметь:

$$A_u e^{\beta \tau} = A_w e^{\beta \tau}.$$

Выполнение этого условия для всех τ может иметь место лишь при $A_u = A_w$ и одинаковых β в левой и правой частях равенства.

Поясним физический смысл величины β . Пусть β — мнимая величина $\beta = i\omega$. Тогда, например, для переменной u можно написать:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= A_u \exp \left[i\omega \left(\tau - \frac{1}{M-1} \xi \right) \right] = \\ &= A_u \left[\cos \omega \left(\tau - \frac{1}{M-1} \xi \right) + i \sin \omega \left(\tau - \frac{1}{M-1} \xi \right) \right]. \end{aligned}$$

Рассмотрим поведение $\bar{u}$ в некотором заданном сечении $\xi = \text{const}$, пользуясь действительной частью последнего выражения. Легко видеть, что при этих условиях переменная u будет совершать гармонические колебания во времени с частотой ω .

Таким образом, число β может иметь смысл частоты колебаний, причем эта частота будет одинакова для всех ξ . Колебания газа в трубе, происходящие во всех сечениях (при всех ξ) с одинаковой частотой, должны привести к тому, что все параметры газового течения — давление, скорость, плотность и т. п. — будут колебаться с той же частотой. Последнее обстоятельство является следствием полученного несколько выше формального вывода об одинаковости β для всех трех показательных функций (4.12), с помощью которых записано изменение различных параметров единого газового течения.

Смысл величины β был выяснен для случая, когда β является чисто мнимым числом. В общем случае, когда β — величина комплексная, следует по аналогии говорить о комплексной частоте β . Более подробно рассмотрение этого случая будет дано ниже.

Числа A_u , A_w и A_s , являющиеся коэффициентами при показательных функциях в выражениях (4.12), формально определяются следующим образом. Положив $\tau = 0$ и $\xi = 0$,

получаем $\bar{u} = A_u$; $\bar{w} = A_w$ и $\bar{s} = A_s$. Следовательно, числа A_u , A_w и A_s надо определить как величины $\bar{u}$, $\bar{w}$ и $\bar{s}$ в начале координат в момент времени $\tau = 0$.

Решение системы (4.10), которая эквивалентна только что рассмотренной системе (4.11), можно получить непосредственно. Однако более простым является использование решений (4.12) и формул (4.9), связывающих переменные $\bar{p}$ и $\bar{v}$ с переменными $\bar{u}$ и $\bar{w}$.

Вводя обозначения A_v и A_p для $\bar{v}$ и $\bar{p}$ в сечении $\xi = 0$ в момент времени $\tau = 0$, получим:

$$\begin{aligned} \bar{v} = \frac{\bar{u}}{2} + \frac{\bar{w}}{2} &= \frac{1}{2} \left[A_u \exp\left(-\frac{1}{M+1} \beta \xi\right) + \right. \\ &\quad \left. + A_w \exp\left(-\frac{1}{M-1} \beta \xi\right) \right] e^{\beta \tau} = \\ &= \frac{1}{2} \left[(A_u + A_w) \exp\left(-\frac{1}{M+1} \beta \xi\right) + \right. \\ &\quad \left. + (A_u - A_w) \exp\left(-\frac{1}{M-1} \beta \xi\right) \right] e^{\beta \tau}. \end{aligned}$$

Проведем аналогичные преобразования для нахождения $\bar{p}$ и запишем окончательно частное решение системы (4.10) в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v} &= [A_v \varphi_1(\xi) + A_p \varphi_2(\xi)] e^{\beta \tau}, \\ \bar{p} &= [A_v \varphi_2(\xi) + A_p \varphi_1(\xi)] e^{\beta \tau}, \\ \bar{s} &= A_s \varphi_3(\xi) e^{\beta \tau}, \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(\xi) &= \frac{1}{2} \left[\exp\left(-\frac{1}{M+1} \beta \xi\right) + \right. \\ &\quad \left. + \exp\left(-\frac{1}{M-1} \beta \xi\right) \right], \\ \varphi_2(\xi) &= \frac{1}{2} \left[\exp\left(-\frac{1}{M+1} \beta \xi\right) - \right. \\ &\quad \left. - \exp\left(-\frac{1}{M-1} \beta \xi\right) \right], \\ \varphi_3(\xi) &= \exp\left(-\frac{1}{M} \beta \xi\right). \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

Полученное решение имеет несколько более громоздкий вид, чем (4.12). Однако во многих случаях его можно предпочитать решению (4.12), поскольку оно дает непосредственные выражения для возмущений основных физических параметров потока.

§ 5. Пример простейшей краевой задачи

В предыдущем параграфе были приведены общие решения уравнений акустики движущегося невяззотропического газа. Однако для однозначного определения исследуемого процесса необходимо сформулировать краевые и начальные условия. Эти условия могут иметь различный вид, в зависимости от конкретного содержания задачи.

В простейшем случае краевые условия могут сводиться к линейным однородным соотношениям между переменными, которые должны удовлетворяться на концах трубы. Поместим начало координат $\xi = 0$ в левом конце трубы и, приняв длину трубы за характерный линейный размер L , получим для правого конца координату $\xi = 1$.

Тогда эти условия можно записать, например, в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}\bar{v} + a_{12}\bar{p} + a_{13}s &= 0, \\ a_{21}\bar{v} + a_{22}\bar{p} + a_{23}s &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{при } \xi = 0 \quad (\text{для всех } \tau \geq 0),$$

$$a_{31}\bar{v} + a_{32}\bar{p} + a_{33}s = 0 \quad \text{при } \xi = 1$$

где a_{ik} — численные коэффициенты.

Задание этих соотношений не определяет, однако, задачи полностью, к ним следует добавить еще начальные условия:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= f_1(\xi) \quad \text{при } \tau = 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \\ \bar{p} &= f_2(\xi) \quad \text{при } \tau = 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \\ s &= f_3(\xi) \quad \text{при } \tau = 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \end{aligned}$$

где f_1 , f_2 и f_3 — заданные функции.

Среди задач описанного типа особый интерес представляют такие, в которых два из трех краевых условий не содержат $\bar{s}$, например в предыдущем примере случай,

когда $a_{13} = a_{23} = 0$. Тогда наличие двух краевых условий, содержащих только $\bar{p}$ и $\bar{v}$, позволяет решать краевую задачу для двух первых уравнений системы (4.10) отдельно от последнего уравнения этой системы. Во многих случаях это оказывается достаточным, так как обычно наибольший интерес представляют колебания давления и скорости газового течения. Лишь в тех случаях, когда надо знать также и колебания энтропии (или других связанных с нею величин), приходится обращаться и к третьему уравнению системы (4.10).

Рассмотрим простейший пример — продольные колебания в газовом потоке, текущем вдоль трубы, открытой с обоих концов. Если считать, что открытые концы сообщаются с неограниченным пространством, то в первом приближении в качестве краевых условий можно использовать часто применяемое в акустике условие постоянства давления на концах трубы, естественное для трубы в безграничном пространстве. В рассматриваемой задаче это условие примет вид

$$\left. \begin{aligned} p &= 0 & \text{при } \xi = 0 & (\tau \geq 0), \\ \bar{p} &= 0 & \text{при } \xi = 1 & (\tau \geq 0). \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

Написанные краевые условия не содержат переменной z , поэтому будем решать краевую задачу для двух первых уравнений системы (4.10). Зададим еще начальные условия:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v} &= f_1(\xi) & \text{при } \tau = 0 & (0 \leq \xi \leq 1), \\ \bar{p} &= f_2(\xi) & \text{при } \tau = 0 & (0 \leq \xi \leq 1). \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

Задаче функций f_1 и f_2 означает, что возмущение движения газа в трубе в начальный момент времени известно.

Обратимся к решению (4.13). Из формул (4.14) видно, что при $\xi = 0$ $\varphi_1(0) = 1$, $\varphi_2(0) = 0$.

Следовательно, второе равенство (4.13) даст при $\xi = 0$ $\bar{p} = A_p e^{\beta \tau}$. По первому из условий (5.1) эта величина равна нулю для всех τ , что возможно только при $A_p = 0$. На другом конце трубы при $\xi = 1$ тоже должно выполняться условие $\bar{p} = 0$. Из (4.13) и (4.14) следует, что это возможно

лишь для

$$A_c \varphi_2(1) = 0.$$

Вторая формула (4.14) показывает, что, если отбросить тривиальный случай $A_c = 0$, последнее выполняется только при

$$\exp \left[-\frac{2}{1-M^2} \beta \right] = 1. \quad (5.3)$$

Пусть β является комплексной величиной

$$\beta = v + i\omega.$$

Тогда (5.3) можно свести к двум равенствам, связывающим одни лишь вещественные величины:

$$\begin{aligned} \cos \frac{2}{1-M^2} \omega \exp \left(-\frac{2}{1-M^2} v \right) &= 1, \\ \sin \frac{2}{1-M^2} \omega \exp \left(-\frac{2}{1-M^2} v \right) &= 0. \end{aligned}$$

Поскольку показательная функция вещественной переменной всегда положительна, эти два равенства могут удовлетворяться одновременно только при

$$\left. \begin{aligned} v &= 0, \\ \omega &= (1-M^2) k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Таким образом, заданным краевым условиям удовлетворяют гармонические колебания с вполне определенными частотами ω (случай $k=0$ рассматриваться не будет, так как он соответствует не представляющему интереса переходу потока на новую стационарную скорость течения при том же давлении: $\bar{p}=0$, $\bar{v}=A_0=\text{const}$ при всех τ и ξ). Здесь следует заметить, что точно такие же частоты получились бы для краевых условий $\bar{v}=0$ на обоих концах трубы.

Самая низкая допустимая частота, соответствующая $k=1$, $\omega_1 = (1-M^2)\pi$ называется основным тоном колебаний. Более высокие частоты $\omega_2 = (1-M^2)2\pi$; $\omega_3 = (1-M^2)3\pi$; ... и т. д. часто называют обертонами. В настоящей книге будет использовано другое наименование допустимых частот колебаний. Условимся называть их собственными значениями частоты, или гармониками. При этом основной тон (наинизшую частоту) будем называть первой гармоникой, частоту, соответствующую $k=2$ — второй гармоникой и т. д.

Каждое значение ω , взятое по формуле (5.4), т. е. каждая гармоника, определяет частное решение системы из двух первых уравнений (4.10), удовлетворяющее поставленным краевым условиям. В силу линейности этих уравнений сумма частных решений также удовлетворяет этим уравнениям и краевым условиям (5.1).

Следовательно, решением системы будут не только функции (4.13), но и их суммы. Взяв суммы для всех значений k , получим

$$\left. \begin{aligned} \bar{v} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_{vk} [e^{-i(1-M)k\pi\xi} + e^{i(1+M)k\pi\xi}] e^{i(1-M^2)k\pi\tau}, \\ \bar{p} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_{pk} [e^{-i(1-M)k\pi\xi} - e^{i(1+M)k\pi\xi}] e^{i(1-M^2)k\pi\tau}. \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

Здесь буквами A_{vk} обозначены неопределенные пока числа, которыми можно распорядиться так, чтобы удовлетворить начальным условиям.

Строго говоря, прежде чем идти дальше, надо было бы доказать сходимость рядов (5.5). В курсах уравнений математической физики приводятся соответствующие теоремы, которые позволяют судить о том, какие ограничения следует наложить на функции $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$ (5.2), чтобы их можно было разложить в ряд по функциям, стоящим в прямых скобках в выражениях (5.5). Этот вопрос и ряд примыкающих к нему вопросов математического характера здесь последовать не будут, главным образом потому, что в дальнейшем задачи с начальными условиями не рассматриваются; интересующиеся найдут соответствующие сведения в специальных руководствах.

Для полноты доведем, однако, решение поставленной в настоящем параграфе задачи до конца, сделав упрощающее допущение, что газ в трубе неподвижен ($M = 0$).

Тогда решения (5.5) примут при $\tau = 0$ следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \sum_{k=1}^{\infty} A_{vk} \cos k\pi\xi, \\ \bar{p} &= \sum_{k=1}^{\infty} -i A_{pk} \sin k\pi\xi. \end{aligned}$$

Полагая $A_{vk} = a_k + ib_k$, получим из последних равенств:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v} &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\pi\xi + ib_k \cos k\pi\xi, \\ \bar{p} &= \sum_{k=1}^{\infty} -ia_k \sin k\pi\xi + b_k \sin k\pi\xi \end{aligned} \right\} \quad \text{при } \tau = 0.$$

Если вспомнить, что лишь действительные части комплексных выражений соответствуют фактическим мгновенным значениям $\bar{v}$ и $\bar{p}$, которые можно наблюдать экспериментально, то, сравнивая полученные выражения с начальными условиями (5.2), сразу получим равенства:

$$\left. \begin{aligned} f_1(\xi) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\pi\xi, \\ f_2(\xi) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\pi\xi. \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Из теории рядов Фурье известно, что любая функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям разложения в ряд Фурье, может быть представлена в виде

$$f(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos k\pi x,$$

где

$$c_k = 2 \int_0^1 f(x) \cos k\pi x dx,$$

если $f(x)$ — четная функция в интервале от $x = -1$ до $x = 1$, или в виде

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\pi x,$$

где

$$b_k = 2 \int_0^1 f(x) \sin k\pi x dx,$$

если $f(x)$ — функция, нечетная в том же интервале.

Функции $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$ заданы не в интервале $(-1, 1)$, а лишь в промежутке $(0, 1)$. Однако обе функции можно продолжить и на интервал $(-1, 0)$. При этом функцию $f_2(\xi)$ естественно продолжить нечетно, поскольку по крайнему условию (5.1) $f_2(0) = 0$. Функция $f_1(\xi)$, представляющая возмущение скорости, при $\xi = 0$, вообще говоря, не равна нулю, и ее следует продолжить четно. При этом, не нарушая общности, можно положить ее среднее значение равным нулю, так как если это среднее значение отлично от нуля, его можно прибавить к скорости невозмущенного течения.

Таким образом неопределенные коэффициенты a_k и b_k в формулах (5.6) легко находятся как коэффициенты соответствующих рядов Фурье

$$a_k = 2 \int_0^1 f_1(x) \cos k\pi x \, dx,$$

$$b_k = 2 \int_0^1 f_2(x) \sin k\pi x \, dx,$$

и задача решена.

§ 6. Стоячие волны $\bar{p}$ и $\bar{v}$

Решение (4.13) показывает, что в каждой точке трубы давление и скорость колеблются одинаковым образом во времени. При этом амплитуды колебаний могут быть разными и зависят от координаты ξ . Движение такого типа принято называть стоячей волной. Сечения, в которых перемещения p и v во все моменты времени равны нулю, называют узлами стоячей волны, а сечения, в которых p и v достигают наибольшего значения — пучностями.

Осуществленное в предыдущем параграфе представление произвольного возмущения в виде сумм (5.5) можно теперь истолковать как получение произвольного вида возмущения путем суперпозиции (наложения) стоячих волн.

Из сказанного видно, что стоячие волны колебаний представляют значительный интерес и более подробное рассмотрение их свойств является необходимым.

Каждой гармонике (каждому значению ω) соответствует своя стоячая волна. Если графически изобразить изменение амплитуд колебаний в функции координаты ξ , то получится волнообразная кривая, приходящая к осям ξ в узлах и достигающая максимумов в пучностях. Из формул (5.5) видно, что каждая стоячая волна (слагаемое под знаком суммы, соответствующее некоторому K) складывается из двух периодических функций переменной ξ .

Для некоторой стоячей волны, соответствующей заданному k , будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_k &= \frac{1}{2} A_{vk} [e^{-i(1-M)k\pi\xi} + e^{i(1+M)k\pi\xi}] e^{i(1-M^2)k\pi\tau}, \\ \bar{p}_k &= \frac{1}{2} A_{vk} [e^{-i(1-M)k\pi\xi} - e^{i(1+M)k\pi\xi}] e^{i(1-M^2)k\pi\tau}. \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

Найдем амплитуды $\bar{v}_k$ и $\bar{p}_k$, понимая под этим абсолютные значения комплексных переменных $\bar{v}_k$ и $\bar{p}_k$. Если вспомнить, что абсолютное значение произведения комплексных чисел равно произведению абсолютных значений сомножителей, а абсолютное значение показательной функции с мнимым показателем всегда равно единице, то

$$\left. \begin{aligned} |\bar{v}_k| &= \frac{1}{2} |A_{vk}| e^{iMk\pi\xi} (e^{-ik\pi\xi} + e^{ik\pi\xi}) = \\ &= |A_{vk}| |\cos k\pi\xi|, \\ |\bar{p}_k| &= \frac{1}{2} |A_{vk}| e^{iMk\pi\xi} (e^{-ik\pi\xi} - e^{ik\pi\xi}) = \\ &= |A_{vk}| |\sin k\pi\xi|. \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Полученные выражения указывают на два важных свойства стоячих волн $\bar{v}$ и $\bar{p}$. Во-первых, пучностям $\bar{p}$ соответствуют узлы $\bar{v}$ и наоборот, причем узлы расположены на одинаковом расстоянии от соседних пучностей, а пучности на одинаковом расстоянии от соседних узлов. Во-вторых, амплитуды $|\bar{v}_k|$ и $|\bar{p}_k|$ являются периодическими функциями координаты ξ .

Поскольку амплитуды стоячих волн оказались периодическими функциями координаты ξ , можно ввести понятия о длине волны возмущения. Будем называть длиной

стоячей волны удвоенное расстояние между узлами давления или узлами скорости. Длина волны определена как удвоенное расстояние между узлами для того, чтобы новое определение совпадало при $M = 0$ с общепринятым в акустике неподвижной среды. Из приведенного определения следует также, что расстояние между узлами давления и соседним узлом скорости равно четверти длины волны.

Как видно из сказанного, многие свойства стоячих волн в движущейся среде совпадают с соответствующими свойствами стоячих волн в трубах, заполненных неподвижным газом (или свойствами стоячих волн на струне). Однако между ними есть и различия. Если в неподвижной среде стоячая волна характеризуется тем, что во всех сечениях фазы колебания совпадают, то для стоячих волн в движущейся среде это свойство теряет силу.

Формулы (6.1) можно записать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_h &= A_{vh} \cos k\pi\xi e^{ik\pi[M\xi + (1-M^2)\tau]}, \\ \bar{p}_h &= iA_{ph} \sin k\pi\xi e^{ik\pi[M\xi + (1-M^2)\tau]}. \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

Напомним, что если представлять колебательный процесс, пользуясь комплексными переменными, то равенство фаз выражается как равенство аргументов комплексных чисел. Очевидно, что постоянные множители A_{vh} и iA_{ph} одинаковым образом влияют на аргументы $\bar{v}_h$ и $\bar{p}_h$ для всех ξ и τ . Кроме того, выражения $\cos k\pi\xi$ и $\sin k\pi\xi$ являются вещественными и поэтому их аргументы не зависят от ξ и τ . Следовательно, изменение аргументов при изменении ξ и τ может происходить только в связи с изменением аргумента выражения

$$e^{ik\pi[M\xi + (1-M^2)\tau]}.$$

При $M = 0$ (неподвижная среда) аргумент этого выражения зависит только от τ . Следовательно, при заданном $\tau = \tau_1$ аргументы $\bar{v}_h$ и соответственно $\bar{p}_h$ для всех ξ одинаковы. Поэтому в неподвижном газе фазы колебаний для всех ξ совпадают.

При $M \neq 0$ (движущаяся среда) аргумент рассматриваемого выражения зависит не только от τ , но и от ξ

тем сильнее, чем больше M . При заданном $\tau = \tau_1$ аргумент $\bar{v}_k$ (п p_k) есть линейная функция ξ . Разность фаз колебаний в двух сечениях $\xi = \xi_1$ и $\xi = \xi_2$ равна

$$k\lambda M (\xi_2 - \xi_1)$$

и не зависит от времени.

Если вдуматься в этот формальный вывод, то он окажется вполне естественным. Действительно, стоячая волна в неподвижной среде характеризуется совпадением фаз колебаний во всех сечениях. Если такие колебания возникают в движущемся газе, то они будут стоячими относительно среды, и поэтому узлы и пучности будут двигаться со скоростью среды. В рассматриваемой задаче, в соответствии с краевыми условиями (5.1), узлы должны быть неподвижны относительно стенок трубы и поэтому волна должна «бежать» против потока со скоростью движения потока относительно стенок трубы. Следовательно, нельзя ожидать полного совпадения свойств стоячих волн в трубах при покое или движении среды. Как показывает сделанный анализ, при движении узлов относительно среды возникает фазовый сдвиг между колебаниями, происходящими в разных сечениях.

Формулы (6.2) показывают, что эюры амплитуд (абсолютных величин) стоячих волн $\bar{v}$ и $\bar{p}$ изображаются отрезками тригонометрических функций $\sin$ и $\cos$. Эти эюры показаны на рис. 6, где даны четыре первые гармоник. Видно, что при колебаниях по основному тону (первой гармонике) на длине трубы помещается половина длины волны, второй гармонике соответствует полная длина волны, третьей — полторы длины волны и т. д. Чем больше номер гармоники, т. е. чем больше частота колебаний, тем большее количество полуволн помещается на длине трубы.

При построении эюр было принято, что $|A_{rk}| = 1$ для всех гармоник. Как уже было показано выше, фактические величины A_{rk} определяются из начальных условий.

Глядя на кривые, приведенные на рис. 6, не следует забывать, что они дают лишь абсолютные величины амплитуд, в то время как фактически колебания $\bar{v}$ и $\bar{p}$ сдвинуты по фазе. Формулы (6.3) показывают, что этот сдвиг равен

по абсолютной величине $\frac{\pi}{2}$ (множитель i во второй формуле). Чтобы дать более наглядное представление о характере колебаний скорости и давления, на рис. 7 приведены кривые $\bar{v}$ и $\bar{p}$ для первой гармоник в различные моменты времени τ . Кривые построены для малых

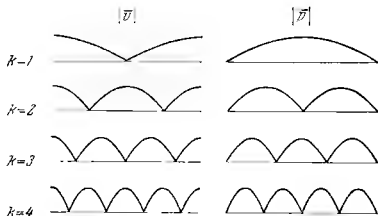


Рис. 6. Элюры стоячих волн $|\bar{v}|$ и $|\bar{p}|$ для первых четырех гармоник (труба, открытая с обоих концов).

скоростей течения ($M \ll 1$) и поэтому на них не проявляется сдвиг между фазами колебания в различных сечениях, о котором шла речь выше.

Как видно из приведенных графиков, моментам наибольшего возмущения скорости соответствуют моменты практически полного отсутствия возмущений давления, и наоборот. Физически происходящее явление может быть легко пояснено следующим образом. В момент $\tau=0$ в левой части трубы возмущения скорости положительны, а в правой отрицательны. Следовательно (положительное направление оси ξ — вправо), в левой части трубы массы воздуха получают дополнительное движение вправо, а в правой половине трубы — влево. Таким образом, массы воздуха как бы устремляются к центру, что и вызывает после их «столкновения» и гашения возмущений скорости повышение давления в средней части трубы в момент $\tau = \frac{1}{2}$. Далее сжатый в центре воздух устремляется в области более низкого давления (к концам трубы),

в момент $\tau=1$ возмущение давления исчезает, по движущийся по инерции газ (влево в левой части трубы и вправо в правой) приводит в момент $\tau=\frac{3}{2}$ к появлению наибольшего разрежения в центральной части трубы. Воздух

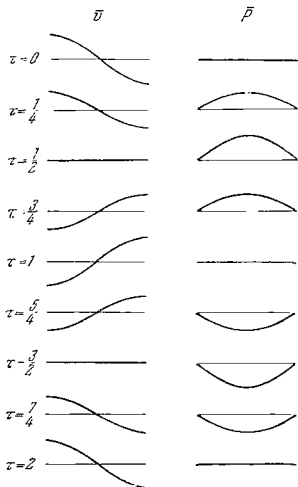


Рис. 7. Эпюры мгновенных значений $\bar{u}$ и $\bar{p}$ для первой гармоника (труба, открытая с обоих концов).

вновь устремляется в область пониженного давления (на этот раз к центру трубы), и весь цикл повторяется.

Эпюры, приведенные на рис. 7, построены для очень малых значений средней скорости течения. Чтобы проиллюстрировать влияние этой скорости на характер колебаний, в частности показать возникающий между фазами

колебания в разных сечениях сдвиг, на рис. 8 приведено изменение $\bar{p}$ в момент времени, близкий к $\tau = 0,5$ для $M = 0$ и $M = 0,2$.

Все сказанное до сих пор касалось колебаний в трубе, открытой с обоих концов (краевые условия $\bar{p} = 0$ для $\xi = 0$

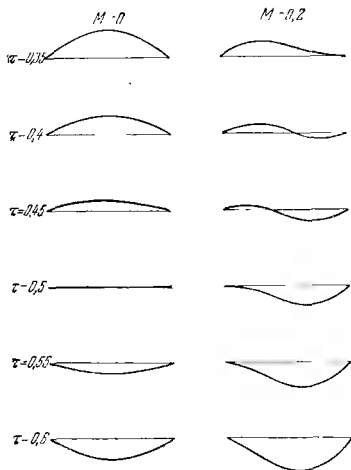


Рис. 8. Эпюры мгновенных значений $\bar{p}$ для первой гармонки (труба, открытая с обоих концов) при $M = 0$ и $M = 0,2$.

и $\xi = 1$). Другим классическим случаем, обычно рассматриваемым в акустике, является возбуждение колебаний в трубе с одним закрытым концом. В этом случае краевые условия можно записать (поместив закрытый конец трубы слева) в следующей форме:

$$\bar{v} = 0 \text{ при } \xi = 0; \quad \bar{p} = 0 \text{ при } \xi = 1.$$

Тогда первое краевое условие дает, согласно формулам (4.13) и (4.14), $A_v = 0$, а второе

$$A_p \varphi_1(1) = 0.$$

Отбрасывая тривиальное решение $A_p = 0$, находим условие, при котором $\varphi_1(1) = 0$, воспользовавшись первым равенством (4.14):

$$\exp\left(-\frac{2}{1-M^2}\beta\right) = -1.$$

Положим, как это делалось выше, $\beta = v + i\omega$ и после ряда несложных преобразований получим:

$$\left. \begin{aligned} v &= 0, \\ \omega &= (1-M^2) \frac{k\pi}{2} \quad (k = 1, 3, 5, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

Сравнивая эти выражения с аналогичными формулами (5.4), найденными выше, видим, что колебания и в рассматриваемом случае остались гармоническими, но частоты их изменились.

Первая гармоника (основной тон колебания) характеризуется вдвое меньшей частотой, а высшие гармоники связаны с основным тоном не отношениями частот, пропорциональными ряду натуральных чисел $1:2:3:\dots$, а отношениями частот, пропорциональными ряду нечетных чисел $1:3:5,\dots$. Таким образом, у трубы, открытой с двух концов, частота второй гармоники вдвое выше частоты основного тона, а у трубы, закрытой с одного конца, втрое выше частоты основного тона.

Если рассматривать стоячие волны в трубе с одним закрытым концом, то большинство выводов, полученных в настоящем параграфе, может быть легко распространено и на этот случай. Разница будет лишь в том, что частоту для $k=1$ надо будет всюду взять вдвое меньшую, величина k сможет принимать лишь нечетные значения, а вместо амплитуд A_{rk} войдут A_{pk} и произойдет связанная с этим смена ролей функций $\varphi_1(\xi)$ и $\varphi_2(\xi)$.

В частности, вместо формул (6.2) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} |\bar{v}_k| &= |A_{pk}| \left| \sin \frac{k\pi\xi}{2} \right|, \\ |\bar{p}_k| &= |A_{pk}| \left| \cos \frac{k\pi\xi}{2} \right|, \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

а вместо формул (6.3) следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_k &= -i A_{pk} \sin \frac{k\pi\xi}{2} \exp \frac{ik\pi [M\xi + (1-M^2)\tau]}{2}, \\ \bar{p}_k &= A_{pk} \cos \frac{k\pi\xi}{2} \exp \frac{ik\pi [M\xi + (1-M^2)\tau]}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

Пользуясь этими выражениями и положив $A_{pk} = 1$, легко построить эюры амплитуд колебаний (6.5) для различных гармоник, подобно тем, которые были приведены на рис. 6. Такое построение для трех первых гармоник дано на рис. 9. Эти эюры показывают, что при коле-

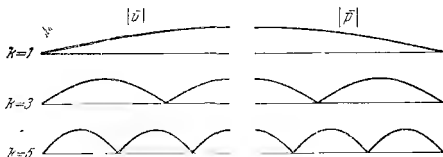


Рис. 9. Эюры стоячих волн $|\bar{v}|$ и $|\bar{p}|$ для трех первых гармоник (труба, открытая с одного конца).

баниях по основному тону (первой гармонике) на длине трубы помещается четверть длины волны, при колебаниях по второй гармонике — $3/4$ длины волны, третьей гармонике соответствует $1 1/4$ длины волны и т. д.

Если говорить не об абсолютных величинах амплитуд возмущений, а о мгновенных значениях возмущений давления и скорости, то следует воспользоваться формулами (6.6), нанося на график лишь вещественные части получаемых величин. Тогда для основного тона, взятого для примера, будет получена при $M=0$ картина колебаний, представленная на рис. 10. Как и в случае акустических колебаний, в трубе, открытой с двух концов, между колебаниями скорости и давления имеется сдвиг по фазе на $\frac{\pi}{2}$, а моментам наибольшего возмущения скорости соответствуют моменты отсутствия возмущений давления, и наоборот. При желании нетрудно построить и для этого случая

графики, аналогичные приведенным на рис. 8, т. е. учесть сдвиги фаз при $M \neq 0$.

Упомянутый здесь сравнительно малый в обычных условиях сдвиг по фазе связан с наличием течения по

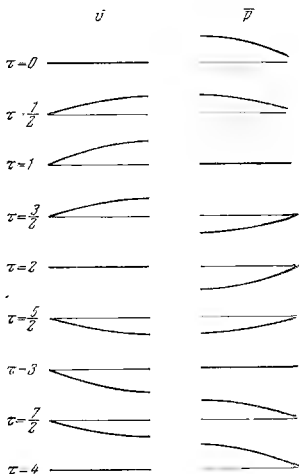


Рис. 10. Эпюры мгновенных значений $\bar{u}$ и $\bar{p}$ для первой гармоники (труба, открытая с одного конца).

трубе со средней скоростью, неравной нулю. Существование такого течения может показаться странным для трубы с одним закрытым концом. Следует иметь в виду, что закрытый с акустической точки зрения конец трубы может быть вовсе не закрытым с других точек зрения. Пример такого рода дает описанный в гл. X предтопок, работающий на пылеугольном топливе. Здесь можно привести другой пример, по-видимому, более наглядный. Предста-

вим себе, что у закрытого конца трубы расположены форсунки, подающие через весьма малые отверстия жидкое горючее и жидкий окислитель. Указанные компоненты топлива, вступая в реакцию горения, дают поток газообразных продуктов сгорания, движущихся по трубе к ее открытому концу. Таким образом, в подобной трубе, являющейся простейшей идеализацией жидкостного реактивного двигателя, будет наблюдаться непрерывный поток газов при наличии закрытого (для газов) конца у трубы.

В заключение обратимся к рассмотрению периодов акустических колебаний. Численное значение периода колебаний для обоих рассмотренных типов труб легко получить, зная безразмерные частоты колебаний, приведенные в формулах (5.4) и (6.4), поскольку связь между периодом колебаний T и частотой ω дается известной формулой

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (6.7)$$

одинаково годной как для размерных, так и для безразмерных переменных.

Однако здесь можно привести и более наглядный способ получения нужных формул. Период колебаний связан с длиной волны и скоростью распространения возмущений известным простым соотношением. Для неподвижного газа скорость возмущений равна скорости звука a и поэтому

$$T = \frac{\lambda}{a}, \quad (6.8)$$

где λ — длина волны.

Если вспомнить, что для труб с открытыми концами длина волны равна удвоенной длине трубы, а для труб с одним закрытым концом — учетверенной, то сразу получаются простые формулы:

$$T = \frac{2L}{a} \quad \text{и} \quad T = \frac{4L}{a}. \quad (6.9)$$

Иногда говорят в связи с этим, что период колебаний в первом случае равен времени, необходимому для движения звуковой волны вдоль трубы и обратно, а во втором

случае говорят о двукратном движении звуковой волны в обоих направлениях.

Приведенные формулировки нельзя рассматривать как простые правила для запоминания; они отражают физическую сущность процесса, которую легко уяснить, обратившись к решению, записанному при помощи переменных u и w .

Анализ системы (4.6), приведенный на странице 37, показал, что акустические импульсы u и w движутся по трубе в разных направлениях со скоростью $v_0 + a$ и $v_0 - a$ соответственно. Следовательно, расстояние, равное длине трубы L импульс u пройдет в положительном направлении за время $\frac{L}{a+v_0}$, а импульс w в отрицательном направлении за время $\frac{L}{a-v_0}$. Краевое условие, соответствующее открытому концу (узлу давления) $\delta p = 0$, выраженное при помощи переменных u , w , будет иметь следующий вид (4.5):

$$u = w, \quad (6.10)$$

а краевое условие, соответствующее закрытому концу трубы (узлу скорости) $\delta v = 0$,

$$u = -w. \quad (6.11)$$

Пусть некоторый единичный акустический импульс u_1 двинулся в положительном направлении вдоль трубы с открытыми концами. Дойдя до правого конца трубы, он «отразится» от него по краевому условию (6.10) и влево двинется импульс w_1 той же интенсивности. Дойдя до левого конца трубы и отразившись от него по тому же краевому условию (6.10), импульс w_1 вновь вернется к первоначальному значению u_1 , после чего указанный цикл будет повторяться неограниченное количество времени.

В трубе с одним закрытым концом (например, слева) процесс в своей начальной стадии ничем не будет отличаться от описанного. Однако, когда отраженный от открытого конца трубы импульс w_1 достигнет левого (закрытого) конца, он отразится уже по краевому условию (6.11) и вправо двинется импульс $-u_1$. Затем последует отражение от открытого конца, влево пойдет импульс $-w_1$

и только после второго отражения от закрытого конца выраво двинется первоначальный импульс u_1 .

Таким образом, весь цикл, после которого система приходит в исходное состояние, сводится в трубе с двумя открытыми концами (или двумя закрытыми концами) к однократному движению акустического импульса в обоих направлениях трубы, а в трубе с одним закрытым и одним открытым концом - к двукратному движению в обоих направлениях.

В связи со сказанным период колебаний для трубы с двумя открытыми или закрытыми концами определится равенством

$$T = \frac{L}{a + v_0} + \frac{L}{a - v_0} = \frac{1}{1 - M^2} \frac{2L}{a}, \quad (6.12)$$

и для трубы с одним закрытым и одним открытым концом

$$T = \frac{L}{a + v_0} + \frac{L}{a - v_0} + \frac{L}{a + v_0} + \frac{L}{a - v_0} = \frac{1}{1 - M^2} \frac{4L}{a}. \quad (6.13)$$

Сравнивая формулы (6.12) и (6.13) с полученными ранее для неподвижной среды формулами (6.9), видим, что при движении среды периоды колебаний отличаются множителем $\frac{1}{1 - M^2}$, близким к единице при достаточно малых скоростях течения ($M^2 \ll 1$).

Таким образом, периоды колебаний для акустических систем с движущимся газом в простейшем случае, рассмотренном выше, можно в первом приближении рассчитывать, не принимая во внимание средней скорости течения.

Этот результат, конечно, можно было получить и сразу, воспользовавшись формулами для частот колебаний (5.4) и (6.4), из которых видно, что частоты для $M = 0$ и $M \neq 0$ отличаются лишь тем, что во втором случае в формулах для ω появляется множитель $(1 - M^2)$.

§ 7. Бегущие волны $\bar{u}$, $\bar{w}$ и $\bar{s}$

В конце предыдущего параграфа уже были использованы переменные $\bar{u}$ и $\bar{w}$. Они оказываются весьма полезными и в ряде других случаев. Поэтому целесообразно провести рассмотрение свойств волн u и w , подобно тому,

как это было только что сделано для волн $\bar{p}$ и $\bar{v}$. Последнее тем более полезно, что как система уравнений (4.10), так и система уравнений (4.11) содержат еще возмущение энтропии $\bar{s}$, свойства которого почти полностью совпадают со свойствами возмущений $\bar{u}$ и $\bar{w}$.

Рассмотрим решения (4.12). При гармонических колебаниях, соответствующих $\beta = i\omega$, амплитуды колебаний $\bar{u}$, $\bar{w}$ и $\bar{s}$ будут постоянны во всех сечениях и равны соответственно $|A_u|$, $|A_w|$ и $|A_s|$.

Чтобы подчеркнуть отличие волн $\bar{u}$, $\bar{w}$ и $\bar{s}$ от волн $\bar{p}$ и $\bar{v}$, будем говорить о них, как о бегущих волнах, понимая

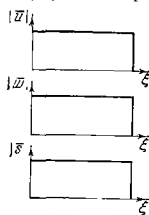


Рис. 11. Эпюры волн $\bar{u}$, $\bar{w}$ и $\bar{s}$.

под последними волны, имеющие вполне определенную скорость распространения (ее удобно представлять себе как скорость смещения гребня волны относительно стенок трубы) и отличающиеся тем, что их амплитуды (высота гребня) остаются постоянными при движении вдоль оси ξ .

Из сказанного выше очевидно, что эпюры абсолютных величин (амплитуд) волн $\bar{u}$, $\bar{w}$ и $\bar{s}$ будут иметь одинаковую форму для всех гармоник (рис. 11). То, что эпюры амплитуд $|u|$, $|w|$ и $|s|$ имеют одинаковую форму для всех гармоник, причем амплитуды колебаний не

зависят от ξ , представляет значительные удобства при решении задач. Достаточно сравнить графики, приведенные на рис. 6 или 9, с прямоугольными эпюрами рис. 11, чтобы убедиться в этом.

Для полноты картины на рис. 12 приведены изменения переменных $\bar{u}$, $\bar{w}$ и $\bar{s}$ в функции времени t . На указанном рисунке графики, расположенные ниже, относятся к более поздним моментам времени. Сравнивая между собою поведение переменных $\bar{u}$, $\bar{w}$ и $\bar{s}$, нетрудно видеть, что волны $\bar{u}$ смещаются вправо, а волны $\bar{w}$ — влево. Что касается волн $\bar{s}$, то они смещаются, как и волны $\bar{u}$, вправо, но расстояние между гребнями волн $\bar{s}$ много меньше,

чем у волн $\bar{u}$ и $\bar{w}$. Это связано с тем, что акустические импульсы u и w распространяются со скоростью звука и на их перемещении сравнительно слабо сказывается значительно более медленное движение среды со скоростью v_0 . В отличие от этого волны энтропии $\bar{s}$ переносятся средой

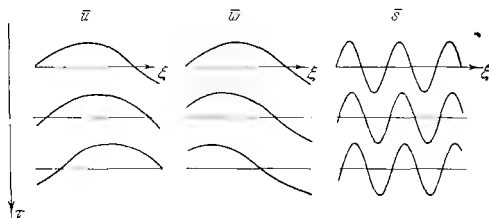


Рис. 12. Эпюры мгновенных значений $\bar{u}$, $\bar{w}$ и $\bar{s}$.

и поэтому скорость смещения волн $\bar{s}$ много меньше, чем у $\bar{u}$ и $\bar{w}$.

Как уже говорилось, формы эпюр амплитуд волн u , w и s не зависят от номера возбужденной гармоники. Этого нельзя сказать об эпюрах мгновенных значений u , w и s , приведенных на рис. 12. Чем выше будет номер гармоники, тем большее число волн $\bar{u}$, $\bar{w}$ и $\bar{s}$ будет помещаться на длине трубы.

§ 8. Устойчивость газового течения

В двух предыдущих параграфах были рассмотрены некоторые общие свойства волн возмущений и теперь можно вернуться к рассмотрению задачи о распространении возмущений, начатому в § 5 для простейшего случая.

Оказывается, что решения задачи с учетом начальных и краевых условий в той форме, как это делалось в § 5, обычно можно избежать. В огромном большинстве практически интересных случаев возбуждения акустических

колебаний теплоподводом решение задачи с учетом начальных условий интереса не представляет.

Это связано главным образом с тем, что обычно колебания возникают в результате развития каких-то весьма малых и неопределенных начальных возмущений, которые всегда присутствуют в виде неизбежной флуктуации параметров течения. Вне зависимости от характера этих начальных флуктуаций акустические колебания в потоке в процессе своего развития (при условиях, благоприятствующих такому развитию) достигают заметных амплитуд, рост которых в конце концов останавливается. В результате колебательная система выходит на режим установившихся акустических колебаний, характер которых, как правило, не зависит от конкретного вида начальных возмущений. Пример такого процесса будет приведен в главе VI.

Указанное обстоятельство упрощает исследование вопроса, поскольку позволяет отказаться от формулирования начальных условий — задачи почти невыполнимой вследствие крайней неопределенности малых начальных возмущений течения.

В теории колебаний описанный ход явления известен как случай мягкого самовозбуждения автоколебаний.

Для того чтобы система возбуждалась указанным образом, она должна быть неустойчивой по отношению к малым возмущениям течения. Процесс самовозбуждения можно представить себе следующим образом. В начальный момент времени существует некоторое малое возмущение течения, удовлетворяющее краевым условиям. Это возмущение можно представить как наложение гармоник системы¹⁾, причем численное значение амплитуды каждой гармоники [например, чисел A_k в суммах (5.5)] определяется видом начального возмущения. Поскольку начальные возмущения могут иметь самый различный вид, следует предположить, что амплитуды всех гармоник отличны от нуля. Если среди гармоник системы хотя бы одна неустойчива, то ее амплитуда будет возрастать со

¹⁾ Здесь и ниже не будет делаться разницы между понятиями гармоника и стоячая волна, соответствующая ей, в тех случаях, когда не может возникнуть путаницы.

временем, возмущение течения перестанет быть малым и неустойчивая гармоника, обогнав в своем развитии все остальные, придаст всему процессу колебаний свойственные ей черты, вне зависимости от вида начального возмущения.

Таким образом, оказывается, что начальные условия сформулировать не только трудно, но и нецелесообразно. Однако, если не учитывать начальные условия, в математическом решении задачи должна появиться некоторая неопределенность. Эта неопределенность скажется в том, что начальные амплитуды стоячих волн (числа A_{vk} и A_{pk}) останутся неизвестными. Легко сообразить, что в огромном большинстве случаев это не может помешать отысканию результата, представляющего действительный интерес, поскольку выше было указано, что основным является вопрос о том, нет ли среди гармоник системы неустойчивых, амплитуды которых со временем стремятся к неограниченному возрастанию (этому возрастанию ставят предел нелинейные свойства системы, никак не зависящие от начальных условий). При этом вопрос о начальной величине амплитуды, которая стремится беспрестанно возрастать, является совершенно второстепенным.

Основываясь на сказанном, можно следующим образом сформулировать задачу, подлежащую исследованию.

Нужно найти решение системы уравнений возмущенного движения, удовлетворяющее заданным краевым условиям, и дать количественную оценку устойчивости (или неустойчивости) каждой гармоники решения, предполагая, что в момент времени $t = 0$ все гармоники имеют некоторые отличные от нуля начальные значения амплитуд возмущения.

Решения задач о колебаниях в потоке газа, движущегося по трубе с двумя открытыми концами или по трубе с одним закрытым концом, приведенные выше, дали для всех гармоник синусоидальные колебания, амплитуды которых не возрастают и не убывают с течением времени. При желании получить более общий результат следует воспользоваться краевыми условиями более общего вида, не ограничиваясь случаями узлов давления или скорости.

Для того чтобы не усложнять выкладки, рассмотрим сравнительно простую задачу о возбуждении колебаний в том случае, когда на выходе из трубы имеется узел давления, а на входе выполняется однородное условие

$$\bar{p} = B\bar{v}.$$

Таким образом,

$$\left. \begin{array}{l} \bar{p} = B\bar{v} \quad \text{при} \quad \xi = 0, \\ \bar{p} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 1. \end{array} \right\} \quad (8.1)$$

Поскольку условия (8.1) не содержат возмущения энтропии $\bar{s}$, задача может быть решена для двух первых уравнений системы (4.10) независимо от третьего. Решение задачи проведем по той же схеме, что и в предыдущих параграфах. При $\xi = 0$ $\varphi_1(\xi) = 1$, $\varphi_2(\xi) = 0$. Тогда формулы (4.13) вместе с первым из краевых условий (8.1) дадут

$$A_p = BA_v.$$

При $\xi = 1$ условие $\bar{p} = 0$ вместе со вторым равенством (4.13) и с учетом только что полученной связи между A_p и A_v даст соотношение

$$\varphi_2(1) + B\varphi_1(1) = 0,$$

если отбросить тривиальный случай $A_p = A_v = 0$.

Обратившись к формулам (4.14), сразу получаем уравнение для нахождения β :

$$\exp \frac{2}{1-M^2} \beta = \frac{1+B}{1-B}. \quad (8.2)$$

Пусть число B будет вещественным. Это допущение не искажает общей картины изучаемого явления, но сильно упрощает выкладки.

После подстановки $\beta = v + i\omega$ в уравнение (8.2) нетрудно прийти к следующей системе, связывающей только вещественные переменные:

$$\left. \begin{array}{l} \exp \frac{2v}{1-M^2} \cos \frac{2\omega}{1-M^2} = \frac{1+B}{1-B}, \\ \exp \frac{2v}{1-M^2} \sin \frac{2\omega}{1-M^2} = 0. \end{array} \right\} \quad (8.3)$$

Второе уравнение сразу определяет ряд частот, из которого можно выбрать частоты, удовлетворяющие

и первому уравнению. Этот ряд дается равенством

$$\omega = (1 - M^2) \frac{k\pi}{2} \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Нетрудно видеть, что не все эти частоты удовлетворяют системе. Действительно, показательная функция $\exp \frac{2v}{1-M^2}$ может принимать лишь положительные значения n , следовательно, знак $\cos$ и знак дроби $\frac{1+B}{1-B}$ должны быть одинаковыми. Знак же $\cos$ зависит от того, четные или нечетные значения k берутся.

Таким образом, окончательное выражение для частот системы ω можно записать в следующем виде:

$$\omega = (1 - M^2) \frac{k\pi}{2} \begin{cases} k = 0, 2, 4, \dots, & \text{если } \frac{1+B}{1-B} > 0, \\ k = 1, 3, 5, \dots, & \text{если } \frac{1+B}{1-B} < 0. \end{cases} \quad (8.4)$$

Поскольку знаки дроби $\frac{1+B}{1-B}$ и величины $\cos \frac{2\omega}{1-M^2}$ всегда совпадают, а $\cos \frac{2\omega}{1-M^2}$ по абсолютной величине равен единице, из первого уравнения системы (8.3) можно найти v

$$v = \frac{1-M^2}{2} \ln \left| \frac{1+B}{1-B} \right|. \quad (8.5)$$

Прежде чем подвергнуть анализу полученный результат, следует сказать о физическом смысле величины v . С этой целью удобно вернуться к решению (4.13). Если рассмотреть процесс колебаний в некотором произвольном сечении трубы $\xi = \xi_1$, то стоящие в прямых скобках выражения примут постоянные значения, а $\bar{v}$ и $\bar{p}$ можно будет записать в виде

$$v = A_1 e^{\beta \tau}; \quad \bar{p} = A_2 e^{\beta \tau},$$

где A_1 и A_2 — некоторые постоянные (для избранного сечения) величины.

Поскольку обе величины изменяются в зависимости от времени одинаково, рассмотрим более подробно поведе-

ние одной из них, например ν . Подставив $\beta = \nu : i\omega$, получим:

$$\bar{v} = A_1 e^{\nu \tau} (\cos \omega \tau + i \sin \omega \tau).$$

Стоящее в скобках выражение показывает, что величина $\bar{v}$ колеблется около значения $\bar{v}=0$. Показательная функция времени, стоящая множителем при величине A_1 , характеризует изменение амплитуды колебаний со временем.

Если $\nu > 0$, то показательная функция будет неограниченно возрастать со временем и это будет указывать на неустойчивость процесса — амплитуды возмущений $\bar{v}$, p и других параметров течения будут иметь тенденцию к беспредельному росту; величину ν в этом случае часто называют инкрементом возрастания колебания.

Если $\nu < 0$, то показательная функция будет убывать со временем, приближаясь к нулю. Следовательно, имеет место устойчивость течения, всегда можно указать отрезок времени τ_1 , в течение которого амплитуды возмущений станут по абсолютному значению меньше любой наперед заданной как угодно малой положительной величины. В этом случае число ν называют декрементом затухания колебаний.

Случай $\nu = 0$ является промежуточным. При $\nu = 0$ амплитуды колебаний не возрастают и не убывают со временем. Это состояние — режим установившихся или нейтральных колебаний — представляет особый интерес потому, что его можно рассматривать как режим, соответствующий границе устойчивости. Действительно, если устойчивость системы изменяется непрерывно при непрерывном изменении какого-либо параметра системы, то переход от устойчивости к неустойчивости или наоборот связан с переходом через режим $\nu = 0$.

Таким образом, в дальнейшем можно будет воспользоваться следующими признаками устойчивости:

$$\left. \begin{aligned} \nu > 0 & \text{ — течение неустойчиво,} \\ \nu < 0 & \text{ — течение устойчиво,} \\ \nu = 0 & \text{ — установившиеся колебания,} \\ & \text{ граница устойчивости.} \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

После этого краткого отступления вернемся к рассмотрению полученного выражения для v .

Из (8.5) следует, что при $B=0$ процесс нейтрален, так как ему соответствует $v=0$. Этот результат совпадает с полученным ранее выводом, поскольку равенство $B=0$ означает, как это следует из красных условий (8.1), что не только на выходе, но и на входе находится узел давления $\bar{p}=0$. Такой же результат ($v=0$) дает и подстановка

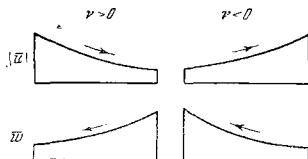


Рис. 13. Эпюры волн $\bar{u}$ и $\bar{w}$ для неустойчивого ($v > 0$) и устойчивого ($v < 0$) течения.

$B = \infty$ (подобное условие означает существование узла скорости на входе в трубу).

В отличие от названных случаев при всех других B величина v принимает значения, отличные от нуля. При $B > 0$ $v > 0$ и течение неустойчиво. При $B < 0$ течение будет устойчивым ($v < 0$).

Таким образом, введение несколько более сложного красного условия, чем использованные в предыдущих параграфах узлы скорости или давления, сразу приводит к качественно новой картине. В зависимости от числа B течение может стать как устойчивым, так и неустойчивым.

При $v \neq 0$ эпюры амплитуд возмущений получаются отличными от тех, которые приведены в двух предыдущих параграфах. Чтобы не перегружать текста, приведем лишь эпюры $|\bar{u}|$ и $|\bar{w}|$, воспользовавшись формулами (4.12). Для каждого заданного τ получатся кривые, представленные на рис. 13. Стрелки около кривых указывают направление движения волн $\bar{u}$ и $\bar{w}$.

Для неустойчивого течения ($\nu > 0$) амплитуды $|n|$ и $|\omega|$ в направлении стрелок уменьшаются; это можно истолковать в том смысле, что вышедшие позже акустические импульсы имеют большую амплитуду, т. е. система увеличивает амплитуды со временем. Для устойчивого течения ($\nu < 0$) наблюдается обратная картина. Следует также заметить, что эюры на рис. 13 построены для некоторого фиксированного момента времени. Для каждого последующего момента времени эюры для $\nu > 0$ будут соответственно увеличивать свои ординаты, для $\nu < 0$ — уменьшать.

Обычно в акустике рассматриваются системы, которые характеризуются либо колебаниями с постоянной амплитудой ($\nu = 0$), либо убывающими со временем амплитудами ($\nu < 0$). Первый случай соответствует идеализированной схеме явления, в которой не учитываются неизбежные потери, а второй — реальным процессам, связанным с диссипацией энергии. В рассмотренном примере при $B > 0$ получено $\nu > 0$, что является, быть может, неожиданным для привычных акустических явлений. Здесь происходит не рассеивание акустической энергии в среде, которое неизбежно во всякой реальной системе, а как бы зарождение все новых и новых количеств акустической энергии, затрачиваемых на все более интенсивную раскачку среды. Вопрос об источнике этой энергии будет подробно рассмотрен в следующей главе. Здесь хотелось бы только подчеркнуть выявившуюся принципиальную возможность самовозбуждения акустических систем рассматриваемого типа. При этом полезно обратить внимание на то, что причина самовозбуждения системы локализована в рассмотренном примере во входном сечении труб. Конечно, реальный физический процесс, который был формально выражен в виде краевого условия $\bar{p} = B\bar{v}$, происходит в некотором объеме в области, прилегающей ко входному сечению. Но важно то, что если путем надлежащей идеализации этот процесс удастся свести к некоторому соотношению, справедливому для одного сечения потока (здесь входного), то открывается путь к сравнительно простому математическому описанию явления в целом. Это обстоятельство будет широко использовано в настоящей книге.

Пользуясь переменными $\bar{u}$ и $\bar{w}$, можно более наглядно истолковать результат, полученный в настоящем параграфе. Если записать краевые условия (8.1), воспользовавшись формулами (4.9), при помощи переменных $\bar{u}$ и $\bar{w}$, то они примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} - \frac{1+B}{1-B} \bar{w} & \text{ при } \xi = 0, \\ \bar{u} = \bar{w} & \text{ при } \xi = 1. \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

Таким образом, импульс u_I , двинувшись от левого конца ($\xi = 0$) к правому концу ($\xi = 1$), отразится от последнего, не изменив величины, и в виде импульса $\bar{w}_I = \bar{u}_I$ пойдет влево. У левого конца трубы пришедший импульс $\bar{w}_I$ отразится в виде импульса u_{II} , причем $\bar{u}_{II} \neq \bar{w}_I$. В зависимости от величины B отраженный импульс u_{II} будет по абсолютной величине больше или меньше пришедшего. Если $B > 0$, то $|\bar{u}_{II}| > |\bar{w}_I|$, а так как этот процесс отражения импульсов от обоих концов трубы будет продолжаться, то амплитуды возмущений будут иметь тенденцию к неограниченному возрастанию. При каждом отражении от левого конца пришедшие импульсы будут испытывать как бы дополнительный внешний толчок. В случае $B < 0$ процесс отражения у левого конца трубы имеет обратный характер — импульсы уменьшают свою интенсивность.

Этот вывод повторяет результаты, полученные в виде формулы (8.5). Кроме того, проведенное рассуждение подтверждает локализацию причины возбуждения системы или гашения колебаний во входном сечении при $\xi = 0$.

Чтобы проиллюстрировать приведенные выше рассуждения, рассмотрим реальный случай течения, в котором краевое условие на входе приобретает вид (8.1) или (8.7).

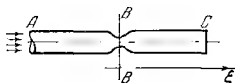
На испытательных стендах для исследования процессов горения или других целей нередко применяется следующая схема течения (рис. 14). По трубе AB от соответствующей воздуходувки подается воздух под пужным давлением. Участок трубы BC предназначен для проведения различных опытов, например, связанных

с организацией процесса горения в концевой части трубы BC . Чтобы процесс горения, который может сопровождаться хлопками при включении системы зажигания, быть неустойчивым и т. д., не влиял на работу воздухо-дувки, в сечении BB делается сужение, причем настолько сильное, чтобы справа от BB образовалась небольшая область со сверхзвуковыми скоростями течения. Тогда, как известно из гидромеханики, никакие возмущения (если только они не разрушают области сверхзвукового течения) не могут передаться из участка трубы BC вверх по течению в участок AB . Этим достигается то, что воздуходувка работает в заданном установившемся режиме

вне зависимости от того, какие нестационарные процессы имеют место на участке BC .

Таким образом, образование сверхзвуковой зоны течения в окрестности сечения BB способствует спокойной работе воздуходувки. Поставим теперь

Рис. 14. Трубопровод с критическим сужением.



вопрос о том, как скажется наличие подобного сужения на процессах, идущих в правой части опытной установки, в частности, как это скажется на характере акустических колебаний в ней. На конце C краевое условие можно написать сразу: $\bar{p} = 0$, так как открытый конец трубы сообщается с внешним пространством. Это приближенное краевое условие справедливо в тех случаях, когда в сечении C не возникает звуковой скорости течения (кризиса), связанного с большим теплоподводом на участке BC . Что касается краевого условия на входе в трубу BC , то оно не является очевидным.

После сужения BB возникает, как уже говорилось, сверхзвуковое течение. Это сверхзвуковое течение тормозится затем в некоторой достаточно сложной системе скачков уплотнения, характер которой предсказать практически невозможно. Поэтому попытка записать краевое условие путем анализа газодинамической картины течения не может быть признана целесообразной. Здесь можно воспользоваться тем, что перед сечением BB поток

всегда невозмущен и поэтому параметры его течения постоянны и не зависят от акустических колебаний, происходящих справа от BB . В частности, секундный расход воздуха, пересекающего сечение BB , постоянен. Если объем области, в которой тормозится сверхзвуковое течение, мал, и мгновенное количество массы воздуха, заключенного в нем, не меняется, то можно считать, что и в лежащем несколько правее BB сечении, где скорость потока вновь дозвуковая, секундный расход воздуха постоянен, несмотря на наличие колебаний давления и скорости. Следовательно, на входе в трубу BC будет выполняться условие

$$\rho v = \text{const.}$$

Будем считать процесс на входе в трубу BC изэнтропичным. Тогда после линеаризации этого соотношения и перехода к принятой системе безразмерных переменных нетрудно получить краевое условие на входе:

$$\bar{p} + \frac{1}{M} \bar{v} = 0. \quad (8.8)$$

Сравнивая его с первым краевым условием (8.1), сразу получаем $B = -\frac{1}{M}$.

Таким образом, в рассматриваемом случае имеет место неравенство $B < 0$ и, следовательно, течение всегда устойчиво. Этим рассмотренный тип течения существенно отличается от течения в трубе, открытой с двух концов или закрытой с одного конца, где колебания получались нейтральными ($v=0$). При создании стендовых установок по схеме, приведенной на рис. 14, в области BB будет происходить демпфирование колебаний, и это будет способствовать более устойчивому протеканию процесса, идущего в трубе BC (например, горения).

Таким образом, течению в трубе, характеризующему постоянством расхода газа на входе, присуще демпфирование акустических колебаний. С точки зрения получения спокойного горения, менее склонного к вибрациям, это свойство является полезным. Поэтому создание стендов по схеме рис. 14 для целей изучения закономерностей стационарного процесса горения будет правильным.

Однако в тех случаях, когда целью опытов является изучение процессов возбуждения колебаний, создание установок с постоянным расходом газа на входе может оказаться нецелесообразным.

Если поставить вопрос о физических процессах, происходящих на входе в трубу и ведущих к рассеиванию энергии, то в каждом конкретном случае механизм рассеивания энергии может быть своим.

§ 9. Продольные автоколебания в газовом течении

В конце предыдущего параграфа был приведен пример устойчивого течения, в котором акустические колебания демпфировались. Здесь не будут приводиться конкретные примеры течений, неустойчивых по отношению к малым возмущениям акустического характера, этому посвящены последующие главы. Однако дать общую картину дальнейшего развития процесса неустойчивости полезно уже сейчас.

Если течение оказалось неустойчивым ($\nu > 0$), то амплитуды всех неустойчивых гармоник будут возрастать со временем, пропорционально множителю $e^{\nu t}$. В зависимости от величины ν (инкремент возрастания колебаний ν может быть различным для разных гармоник), амплитуды неустойчивых гармоник могут расти в разном темпе, но всем им свойственно беспредельное возрастание при $t \rightarrow \infty$. Из физических соображений ясно, что такое развитие процесса колебаний невозможно, и полученный результат связан с недостатками математической идеализации явления.

Как известно, задача решалась для линеаризованных уравнений гидромеханики, полученных в предположении малости всех возмущений. Как только вследствие возрастания множителя $e^{\nu t}$ возмущения перестают быть малыми, системы уравнений (4.10) и (4.11), а вместе с ними и полученные решения перестают быть верными. Таким образом, найденные выше решения годятся лишь для описания начальных этапов развития процесса.

Для получения более полной картины явления следует использовать более точные математические соотношения. Известно, что они должны быть нелинейными. Можно

было бы попытаться решать систему нелинеаризованных, точных уравнений гидромеханики (3.1) и (3.2). Соответствующие методы существуют и составляют предмет теории неустановившихся движений газа ¹⁾. Однако в нашем случае особый интерес представляет тот класс задач, в котором линейные соотношения становятся неправильными сначала для отдельных сечений потока (например, концевых), и лишь затем для всего течения в целом.

Применительно к рассмотренному примеру это означает, что системы уравнений (4.10) и (4.11) и их решения остаются все еще правильными уже тогда, когда краевые условия (8.1) должны быть заменены более точными, нелинейными соотношениями.

Пусть, например, вместо краевых условий (8.1) будут справедливы условия

$$\left. \begin{aligned} \bar{p} &= (B_1 - |\bar{v}|) \bar{v} & \text{при } \xi = 0, \\ \bar{p} &= 0 & \text{при } \xi = 1, \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

где B_1 — достаточно малая положительная величина. Тогда можно ожидать следующего хода процесса. При очень малых начальных возмущениях ($|\bar{v}| \ll B_1$) краевые условия (9.1) будут практически совпадать с краевыми условиями (8.1), причем в силу неравенства $B_1 > 0$ течение будет неустойчивым. Малость B_1 приведет к тому, что процесс неустойчивости будет развиваться медленно и поэтому в течение одного периода колебаний величину $B_1 - |\bar{v}|$ можно будет считать постоянной. По мере увеличения амплитуд колебаний величина $|\bar{v}|$ будет возрастать, разность $B_1 - |\bar{v}|$ — уменьшаться и, следовательно, будет уменьшаться степень неустойчивости. При $B_1 = |\bar{v}|$ процесс колебаний установится, величина $\bar{v}$ станет равной нулю и амплитуды колебаний перестанут возрастать. Таким образом акустическая система рассмотренного типа будет совершать автоколебания с амплитудой, близкой к $|\bar{v}| = B_1$ и $\bar{p} = 0$ в начальном сечении.

¹⁾ См., например, К. П. С т а п ю к о в и ч, Неустановившиеся движения сплошной среды, Гостехиздат, 1955.

Если какая-либо случайная причина уменьшит амплитуду колебаний скорости, то течение станет неустойчивым и амплитуда $\bar{v}$ со временем вновь возрастет. Если же какая-либо причина увеличит амплитуду колебаний скорости, то разность $B_1 - |\bar{v}|$ станет отрицательной, и это будет аналогом краевого условия $\bar{p} = B\bar{v}$ при $B < 0$. Такому течению свойственна устойчивость ($\nu < 0$), его амплитуды будут убывать со временем и система вновь вернется к колебанию с амплитудой $|\bar{v}| = B_1$ во входном сечении. Следовательно, возникшие автоколебания будут устойчивыми — малые отклонения от режима установившихся колебаний в обе стороны будут постоянно сглаживаться с течением времени.

Проведенное здесь рассмотрение является весьма приближенным и далеким от математической строгости. Оно имело единственной целью проиллюстрировать тот факт, что колебательная неустойчивость течения способна привести к автоколебаниям, и указать на такой тип автоколебаний, в котором прекращение роста амплитуд происходит задолго до того, как стали неправильными акустические закономерности, найденные на основе линеаризации уравнений гидромеханики.

ГЛАВА III

ИСТОЧНИКИ ЭНЕРГИИ АУТОКОЛЕБАНИЙ

§ 10. Два источника энергии при термическом возбуждении звука

Во всякой автоколебательной системе можно выделить собственно колебательную систему (в рассматриваемом случае этой системой является газ, находящийся в трубе), источник энергии и некоторый механизм¹⁾, подводящий энергию к колебательной системе.

В предыдущей главе были выяснены наиболее существенные свойства колебательной системы. Вопрос о механизме, подводящем энергию к колебательной системе, будет частично освещен в настоящей главе, но более полно он будет рассмотрен в последующих главах. Главным содержанием настоящей главы является выявление источников энергии, поддерживающих продольные акустические автоколебания газа в трубе при горении, и анализ процессов, позволяющих периодически пополнять убыль акустической энергии из колебательной системы, связанную с неизбежными во всяком реальном явлении потерями.

С точки зрения физики процесса выявления источника энергии, питающего колебательную систему, является одним из основных. К сожалению, этому вопросу, применительно к возбуждению акустических колебаний теплоподводом, уделялось незаслуженно мало внимания, что привело к ряду ошибочных высказываний в литературе.

¹⁾ Термин механизм понимается здесь и ниже весьма широко. Это обычно ряд физических процессов, объединенных причинной связью.

По-видимому, первым исследователем, поставившим такой вопрос (правда, в неявной форме), был Рэлей. В связи с описанием опытов Рийке, Босша, Рисса и других исследователей, он говорил о поддержании колебаний теплотой следующее:

«Если теплота периодически сообщается массе воздуха, колеблющейся, например, в цилиндре с поршнем, и отнимается от нее, то получаемый эффект зависит от фазы колебания, при которой происходит передача тепла. Если теплота сообщается воздуху в момент наибольшего сжатия или отнимается от него в момент наибольшего разрежения, то это усиливает колебание. Напротив, если теплота сообщается в момент наибольшего разрежения, то колебание этим ослабляется»¹⁾.

В этом высказывании Рэлей говорит о возможности возбуждения акустических колебаний за счет энергии теплоподвода. Описанный им процесс является широко известным из термодинамики способом получения механической энергии за счет подводимого тепла путем совершения рабочим телом некоторого термодинамического цикла. Подобные процессы лежат в основе всех поршневых двигателей внутреннего сгорания. Совершенно очевидно, что тепло может перейти в акустическую энергию лишь таким путем, поскольку акустическая энергия есть разновидность механической, а не тепловой энергии. Рэлей подчеркивает это, говоря несколько выше: «Почти во всех случаях, где телу сообщают тепло, происходит расширение, и его можно заставить совершать механическую работу»²⁾.

Здесь хотелось бы подчеркнуть, что в приведенной выше подробной цитате определенным образом говорится о возбуждении акустических колебаний в неподвижном газе (под неподвижным понимается газ, не имеющий никакого другого движения кроме связанного с акустическими колебаниями). Это видно хотя бы из того, что речь идет о газе, заключенном в цилиндре с поршнем. Переходя к несколько более подробному объяснению опытов Рийке, Рэлей проводит ту же идею и для газа, имеющего некото-

1) Р э л е й, Теория звука, т. II, Гостехиздат, 1955, стр. 220.

2) Там же, стр. 219.



рую среднюю скорость движения по трубе. Давая чисто качественное описание явления, Рэлей подчеркивает, что переменная передача тепла от нагретой сетки к газу связана с движением среды, которое складывается из равномерного и наложенного на него колебательного, «между тем как эффект передачи¹⁾ зависит от изменения давления»²⁾.

Таким образом, Рэлей считал источником энергии теплоподвод, который, имея колебательную составляющую, должным образом сдвинутую по фазе относительно колебания давления, позволяет осуществляться термодинамическому циклу, дающему механическую работу. Полученная механическая энергия, поступающая в колебательную систему в том же ритме, в каком осуществляется термодинамический цикл, поддерживает акустические колебания.

Приведенный ход мыслей составляет содержание так называемой гипотезы Рэрея, которая нередко кладется в основу теоретических исследований, посвященных взаимодействию теплоподвода (в частности, горения) и акустических колебаний. В последнее время Путнэм и Деннис сделали попытку доказать эту гипотезу и придать ей математическую форму³⁾. После этого стали говорить не о гипотезе, а о критерии Рэрея, который обычно формулируют так: если между колебательной составляющей теплоподвода и колебательной составляющей давления фазовый сдвиг по абсолютному значению менее $\frac{\pi}{2}$, в системе возбуждаются акустические колебания; если этот сдвиг заключен между $\frac{\pi}{2}$ и π , то акустические колебания гасятся.

Возникает естественный вопрос: исчерпывает ли схема поддержания акустических колебаний теплоподводом, предложенная Рэлеем, все возможные случаи? Иначе это

¹⁾ То есть возбуждение акустических колебаний (B. P.).

²⁾ Там же, стр. 227.

³⁾ Putnam A. A., Dennis W. R., Trans. ASME 75, № 1, 15 (1953). Русский перевод: Путнэм А., Деннис У., Исследование вращающегося горения в горелках, Вопросы ракетной техники, № 5 (23), 1954.

можно сформулировать так: является ли теплоподвод единственным источником энергии, за счет которого могут поддерживаться акустические колебания в системе?

Чтобы ответить на этот вопрос, следует выявить, какими источниками энергии, кроме теплоподвода, располагает колебательная система. Поскольку рассматриваемая система имеет отличную от нуля среднюю скорость течения, то прежде всего следует выяснить, не может ли кинетическая энергия течения служить тем резервуаром, из которого колебательная система будет черпать энергию для поддержания колебаний.

Пусть в некотором сечении газового потока помещено сопротивление. Тогда, если это сопротивление будет переменным, принципиально возможно возбуждение колебаний. Действительно, если в области расположения сопротивления происходят колебания скорости, и если в момент парастания скорости течения сопротивление уменьшается, а в момент уменьшения скорости возрастает, то такое взаимодействие потока с сопротивлением приведет к раскачке системы. Проще всего представить себе это следующим образом. Разобьем все сопротивление на две составляющие — среднюю величину и переменное, периодическое во времени слагаемое. С точки зрения воздействия на поток переменная составляющая сопротивления будет то тормозить, то разгонять его. Если в момент увеличения скорости, связанного с возникшими акустическими колебаниями, переменная составляющая сопротивления будет дополнительно разгонять течение, а в момент уменьшения скорости — дополнительно тормозить его, то амплитуда акустических колебаний будет возрастать. Сопротивление в этом случае как бы раскачивает колебательную систему.

Устройства такого рода широко используются во всякого рода электронных схемах. Наиболее известным примером может служить ламповый генератор в котором сетка лампы играет роль переменного сопротивления описанного типа.

Возвращаясь к задаче о термическом возбуждении звука, следует прежде всего указать на сопротивление, которое способно дать описанный выше эффект. В идеализированной схеме процесса, положенной в основу изуче-

для рассматриваемого типа акустических колебаний, не предполагается наличие каких-либо гидравлических потерь в трубе. Поэтому единственным видом сопротивления, которое надо учесть, является так называемое тепловое сопротивление, возникающее даже в идеальной жидкости.

Здесь не будет излагаться полная теория этого интересного явления; дадим лишь общее представление о тепловом сопротивлении, следуя Г. Н. Абрамовичу ¹⁾. Пусть скорость течения в цилиндрической трубе настолько мала,

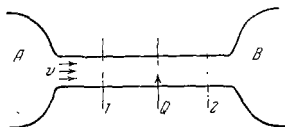


Рис. 15. Расчетная схема для вычисления теплового сопротивления.

что можно не учитывать влияния сжимаемости среды. Присоединим ко входу в трубу и к ее выходному сечению не связанные друг с другом резервуары A и B бесконечно большого объема (рис. 15). Сечение 1 является входным, сечение 2 — выходным; где-то между ними к потоку подводится тепло Q. Жидкость считаем идеальной, а потому никаких гидравлических потерь учитывать не будем. Параметры течения в сечениях 1 и 2 будем отмечать соответствующими индексами, а для резервуаров A и B введем индексы заторможенного течения 01 и 02 соответственно. Тогда согласно уравнению Бернулли

$$p_{01} = p_1 + \frac{\rho_1 v_1^2}{2},$$

$$p_{02} = p_2 + \frac{\rho_2 v_2^2}{2},$$

откуда изменение полного давления будет равно

$$p_{01} - p_{02} = p_1 - p_2 + \frac{\rho_1 v_1^2}{2} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right). \quad (10.1)$$

¹⁾ Г. Н. Абрамович, Прикладная газовая динамика, Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953.

При написании последнего равенства было учтено уравнение неразрывности

$$\varrho_1 v_1 = \varrho_2 v_2.$$

Поскольку рассматривается несжимаемая жидкость, то изменение плотности возможно только за счет подогрева, причем естественно положить

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{T_2}{T_1}.$$

Тогда уравнение (10.1) может быть записано в следующей форме:

$$p_{01} - p_{02} = p_1 - p_2 + \frac{\varrho_1 v_1^2}{2} \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right). \quad (10.2)$$

Из уравнения импульсов можно определить падение давления на участке 1—2

$$p_1 - p_2 = \varrho_1 v_1 (v_2 - v_1).$$

Подставив эту разность в равенство (10.2) и используя уравнение неразрывности и связь между плотностью и температурой, получим окончательную формулу

$$p_{01} - p_{02} = \frac{\varrho_1 v_1^2}{2} \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right). \quad (10.3)$$

Равенство (10.3) показывает, что наличие теплоподвода Q , приводящего к тому, что $T_2 \neq T_1$, неизбежно связано с появлением разницы между полными напорами во входном и выходном сечениях цилиндрической трубы. Этот эффект и называется тепловым сопротивлением.

Попытаемся представить качественную картину возбуждения акустических колебаний теплоподводом за счет кинетической энергии течения. Из формулы (10.3) видно, что при $T_2 > T_1$ (подогрев) сопротивление положительно (суммарная механическая энергия потока перед зоной теплоподвода P_{01} больше, чем аналогичная величина за зоной теплоподвода). При $T_2 < T_1$ (охлаждение) сопротивление отрицательно. Таким образом, если теплоподвод будет колебаться около нуля, то на поток будет попеременно действовать то положительное, то отрицательное сопротивление. Если при этом увеличению скорости тече-



ния будет соответствовать уменьшению сопротивления, то, как уже говорилось, система будет раскачиваться.

Наличие среднего по времени постоянного теплоподвода не сможет изменить этой качественной картины возбуждения, подобно тому, как наличие среднего, не равного нулю теплоподвода не влияет на существо эффекта, указанного Рэлеем.

Описанный здесь механизм возбуждения ускользнул от внимания Рэлея. Принципиальная разница между обоими типами возбуждения акустических колебаний теплоподводом видна, в частности, из того, что в одном случае результат эффекта связан с фазовым сдвигом между теплоподводом и давлением, а в другом — между теплоподводом и скоростью.

Качественные соображения, которыми мы обязаны Рэлею, и соображения о возможности возбуждения звука вследствие колебания теплового сопротивления требуют строгого доказательства. Этому будут посвящены следующие параграфы настоящей главы. Однако уже здесь уместно дать оценку доказательству критерия возбуждения акустических колебаний, данному Путиэмом и Деннисом. Указанные авторы сделали попытку получить общий аналитический критерий возбуждения акустических колебаний теплоподводом (выше уже делалась ссылка на эту работу в связи с изложением гипотезы Рэлея). В результате анализа полученных ими соотношений Путиэм и Деннис пришли к заключению, что единственным и вполне общим критерием возбуждения является критерий, предложенный Рэлеем.

Поскольку сам Релей не приводил доказательства своей гипотезы, после работы Путиэма и Денниса возникло убеждение, что гипотеза Рэлея доказана для самого общего случая. Однако в доказательстве Путиэма и Денниса допущена принципиальная ошибка в исходных положениях. Для упрощения уравнений Путиэм и Деннис пренебрегли скоростью течения по сравнению со скоростью звука и не заметили, что тем самым из рассмотрения исключая имеющий самостоятельное значение источник энергии — кинетическая энергия потока. Что касается неподвижного газа, то в нем действительно единственным механизмом возбуждения может быть механизм, указанный Рэлеем;

сам Рэлей, как было подчеркнуто выше, тоже высказал свою гипотезу, рассматривая неподвижный газ, заключенный в цилиндре с поршнем. Таким образом, в ходе дальнейшего изложения надо обобщить критерий Рэля на случай движущейся среды, дать другие возможные критерии и получить все эти результаты, исходя из основных законов механики сплошных сред. При этом, помимо выяснения важного принципиального вопроса об источниках энергии автоколебаний, будут даны энергетические методы решения некоторых задач, отличающиеся большой простотой и наглядностью.

§ 11. Поток акустической энергии

Будем рассматривать следующую идеализованную схему процесса. Цилиндрическая труба AB делится областью σ на две части (рис. 16). Слева от области σ расположена входная часть трубы, по которой вправо движется

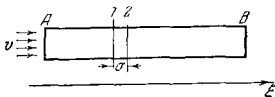


Рис. 16. Расчетная схема для вычисления потоков акустической энергии.

холодный газ. Область σ является областью теплоподвода. Здесь не будет уточняться, какой именно, физический или химический процесс приводит к подогреву газа, условимся только, что тепло сообщается одновременно и в одинаковых долях всем молям газа, пересекающим данное неподвижное сечение, лежащее внутри σ . Это предположение позволяет считать течение одномерным и внутри σ . Так как тепло может подводиться в каждом сечении внутри области σ , то будем считать, что газ подогревается постепенно, по мере движения внутри этой области. Часть трубы, лежащая правее области σ , заполнена подогретым газом, движущимся к выходному концу B . На концах A и B рассматриваемой трубы выполняются некоторые краевые условия, которые пока уточняться не будут.

Поставим вопрос о том, при каких условиях и за счет каких источников происходит генерирование акустической энергии областью σ . Однако прежде чем отвечать на этот вопрос, надо установить, что именно следует понимать под потоком акустической энергии.

Как известно, поток энергии в одномерном газовом течении равен ¹⁾

$$\dot{e} = \rho v \left(\frac{v^2}{2} + c_p T \right) + p v. \quad (11.1)$$

Первое слагаемое, имеющее множителем ρv , описывает перенос энергии потоком массы. Выражение в скобках показывает, что поток массы переносит энергию двух видов — кинетическую и внутреннюю. Первая из них является, как известно, одним из видов механической энергии, а вторая — тепловой. Последнее слагаемое формулы (11.1) описывает передачу энергии давлением; это тоже энергия, имеющая механическую форму.

Возбуждение акустических колебаний связано с передачей импульсов давлением и поэтому из трех слагаемых $\dot{e}$ последнее слагаемое $p v$ представляет основной интерес.

Пусть в газовом течении установились гармонические колебания

$$\left. \begin{aligned} p &= p_0 + \delta p, & \delta p &= |\delta p| \sin \omega t, \\ v &= v_0 + \delta v, & \delta v &= |\delta v| \sin (\omega t + \psi), \end{aligned} \right\} \quad (11.2)$$

где ψ фазовый сдвиг между колебаниями давления и скорости.

Тогда слагаемое $p v$ в формуле для потока энергии (11.1) может быть представлено в виде

$$p v = p_0 v_0 + p_0 \delta v + v_0 \delta p + \delta v \delta p.$$

Интегрируя это равенство по времени за период колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega}$ и относя полученные величины к периоду,

¹⁾ Здесь и ниже тепловые величины выражены в механических единицах, это позволяет не вводить в формулы размерных постоянных.

получим среднее значение потока $p v$ за период

$$(p v)_{\text{ср}} = p_0 v_0 \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \delta v \delta p dt. \quad (11.3)$$

Из полученной формулы видно, что при установившихся гармонических колебаниях средний за период поток $p v$ равен сумме двух потоков энергии. Поток $p_0 v_0$ никак не связан с колебаниями, в то время как второе слагаемое правой части формулы (11.3) зависит только от колебательных составляющих p и v . Это слагаемое естественно назвать потоком акустической энергии A

$$A = \frac{1}{T} \int_0^T \delta v \delta p dt. \quad (11.4)$$

Рассмотрим некоторые, почти очевидные, свойства потока акустической энергии. Воспользовавшись выражениями (11.2), для δp и δv можно написать:

$$A = \frac{1}{2} |\delta p| \delta v \cos \psi. \quad (11.5)$$

Из формулы следует, что в узлах давления $\delta p = 0$ или в узлах скорости $\delta v = 0$ поток акустической энергии равен нулю. Это означает, что в среднем за период через сечение, в котором расположен узел δp или δv , акустическая энергия не перетекает. С этой точки зрения понятно, почему при наличии узлов давления или скорости на концах трубы можно говорить, что краевые условия не допускают излучения акустической энергии в окружающее пространство.

Равенство типа (11.5) удобно записывать в виде скалярного произведения векторов δp и δv . Как уже указывалось во втором параграфе, вариации переменных, которые обычно рассматриваются как комплексные величины, нередко удобно рассматривать в качестве векторов. Следовательно, формулу (11.5) можно записать в виде

$$A = \frac{1}{2} \delta p \delta v. \quad (11.6)$$

Пользуясь такой формой записи, легко убедиться, что для установившихся колебаний величина A сохраняется постоянной при переходе от сечения к сечению. Действительно, обратимся к переменным u и w . Если считать δp и δv векторами, то u и w также следует рассматривать не как комплексные величины, а как векторы, связанные с δp и δv соотношениями (4.5). Но тогда

$$A = \frac{1}{8\rho_0 a^2} (u^2 - w^2). \quad (11.7)$$

Так как скалярные квадраты векторов совпадают с квадратами абсолютных величин, а абсолютные величины $|u|$ и $|w|$ в случае гармонических колебаний не меняются при переходе от сечения к сечению (см. § 7), величина A не может измениться с изменением координаты сечения.

Этот результат можно истолковать как свойство сохранения потока акустической энергии для установившихся колебаний при движении вдоль оси течения.

Из сказанного можно сразу сделать ряд важных выводов. Если при наличии узла скорости или давления в некотором сечении поток акустической энергии через это сечение равен нулю, то условие $A = 0$ должно оставаться справедливым и для других сечений. Но скалярное произведение может быть равным нулю лишь при условии ортогональности сомножителей (если ни один из них не равен нулю). Следовательно, при наличии узла δp или δv в некотором сечении и при установившихся колебаниях фазовый сдвиг между δp и δv во всех других сечениях равен $\frac{\pi}{2}$. Этот результат уже был получен ранее, в виде

формул (6.3) и (6.6), из которых видно, что переменные $\bar{p}_k$ и v_k отличаются минимым множителем. Однако в настоящем параграфе вывод об ортогональности δp и δv приобретает физическую наглядность и может быть обобщен в том смысле, что это условие будет справедливо не только при наличии узлов δp или δv , но и во всех тех случаях, когда вдоль трубы не происходит (в среднем за период) передачи акустической энергии.

В тех случаях, когда при установившихся колебаниях поток акустической энергии A отличен от нуля

(например, когда на концах трубы происходит рассеивание акустической энергии), свойство сохранения $A = \text{const}$ вдоль оси трубы остается справедливым. Из него, в частности, следует, что если абсолютные величины δr и δv меняются в зависимости от координаты ξ (стоячие волны), то это возможно лишь при соответствующем изменении фазового сдвига ψ между ними [формула (11.5)]. Кроме того, ясно, что в таком процессе нигде не может образоваться узлов δr или δv , так как это дало бы $A = 0$.

Как видно из формулы (11.5), величина A может быть как положительной, так и отрицательной, знак ее зависит от угла ψ . Знак A говорит о направлении движения потока акустической энергии. Если акустическая энергия движется в положительном направлении, вправо, то $A > 0$, если влево, то $A < 0$.

Вернемся теперь к рис. 16. Сравнивая потоки акустической энергии на неподвижных плоскостях 1 и 2, ограничивающих область σ , поставим вопрос о количестве акустической энергии, «излучаемой» областью σ . Обозначим поток акустической энергии, пересекающий плоскость 1, через A' , а поток, пересекающий плоскость 2, через A'' . Тогда суммарное количество акустической энергии A_Σ , излучаемой областью σ , будет равно

$$A_\Sigma = A'' - A'. \quad (11.8)$$

Если вспомнить правило знаков, то $A_\Sigma > 0$ означает, что энергия движется от области σ , если $A_\Sigma < 0$, то к области σ . В первом случае область σ генерирует акустическую энергию, во втором поглощает ее, при $A_\Sigma = 0$ область σ является нейтральной.

Пусть на концах трубы A и B потери акустической энергии равны $-R_A$ и $+R_B$ соответственно. Знаки при R_A и R_B выбраны так, чтобы потери акустической энергии были связаны с ее движением из трубы AB во внешнюю среду. Суммарные потери будут, очевидно, равны $R = R_B - R_A$. Тогда из энергетических соображений ясно, что при установившихся колебаниях

$$A_\Sigma = R. \quad (11.9)$$

Если

$$\left. \begin{array}{l} A_z > R \\ \text{или} \quad A_z < R, \end{array} \right\} \quad (11.10)$$

то колебания не могут носить установившегося характера.

В первом случае можно говорить о возбуждении системы, а во втором — о гашении колебаний. Действительно, в первом случае зона σ излучает больше акустической энергии, чем ее могут рассеять потери на концах A и B . Следовательно, часть колебательной энергии накапливается в трубе, что должно вести к увеличению амплитуд колебаний, т. е. к возбуждению колебательной системы. Во втором случае процесс имеет противоположный характер. С этой точки зрения равенство (11.9) соответствует границе устойчивости.

Здесь следует оговориться, что поскольку выше был рассмотрен случай установившихся колебаний, и определение потока акустической энергии было раскрыто лишь для этого случая, точный смысл имеет только формула (11.9). Что касается неравенств (11.10), то их следует рассматривать как полезные качественные критерии.

По величине A_z можно судить о поведении колебательной системы в целом. По слагающим A_z величинам A' и A'' представляется возможность судить о процессах, происходящих слева и справа от σ , например на концах трубы. При установившихся колебаниях величины A' и A'' постоянны для сечений, лежащих слева и соответственно справа от σ . Отличие A' и A'' от нуля говорит о том, что от области σ к концам трубы или от концов трубы к области σ постоянно течет акустическая энергия. Если акустическая энергия течет от области σ к концам трубы (т. е. если $A' < 0$; $A'' > 0$), то это означает, что на концах трубы расположены поглотители этой энергии. Если акустическая энергия движется от концов трубы к области σ (т. е. если $A' > 0$; $A'' < 0$), то это означает, что на концах трубы происходят процессы непрерывной генерации акустической энергии, которая поглощается областью σ .

Охарактеризуем теперь несколько более подробно процессы, идущие внутри области теплоподвода σ . Обстоятельное изучение этого вопроса будет проводиться

ниже, здесь достаточно будет отметить некоторые общие свойства этой зоны. Как уже говорилось, внутри области σ происходит теплоподвод. Область ограничена неподвижными плоскостями 1 и 2. В связи с процессами, идущими внутри σ , между плоскостями 1 и 2 происходит, вообще говоря, изменение всех параметров течения. Если ограничиться рассмотрением одних только возмущений параметров течения, то можно говорить, что δp , δv и δs изменяются вдоль области σ не только в связи с наличием акустических колебаний, но и вследствие процесса теплоподвода, идущего внутри σ . Если считать расстояние между плоскостями, ограничивающими σ , малым по сравнению с длинами волн возмущений, так что волны возмущений, связанные с акустическими колебаниями, не могут заметным образом изменить своих амплитуд и фаз на расстоянии σ , то все изменение δp , δv и δs между плоскостями 1 и 2 будет связано только с процессом теплоподвода.

Отметим индексами 1 все величины, соответствующие левой границе зоны σ , а индексами 2 — величины, соответствующие правой границе зоны σ . Тогда можно ввести следующие обозначения, при написании которых среднее значение давления в левой (холодной) части трубы принято равным p_1 , а средняя скорость звука — a_1

$$\left. \begin{aligned} \delta v_2 - \delta v_1 &= a_1 \delta E, \\ \delta p_2 - \delta p_1 &= \kappa p_1 \delta X, \\ \delta s_2 - \delta s_1 &= c_{p_1} \delta S. \end{aligned} \right\} \quad (11.11)$$

Примем, что область σ мала по сравнению с длиной волн возмущений. Тогда безразмерные величины δE , δX и δS связаны только с процессом теплоподвода и их можно рассматривать как три параметра, описывающие некоторые суммарные свойства возмущенного процесса теплоподвода.

Вопрос о том, достаточны ли эти параметры для однозначного описания необходимых свойств зоны σ , и вопрос об их фактическом определении будет рассмотрен в следующей главе. Здесь достаточно указать на то, что введенные величины разумно описывают физические явления, происходящие в зоне теплоподвода. Величина δE характеризует расширение некоторого объема в связи

с его нагреванием, величина δX — возникновение теплового сопротивления, а величина δS — неизбежное при подогреве изменение энтропии.

Обратимся теперь к вопросу об источниках энергии при термическом возбуждении звука. Будем по-прежнему считать, что протяженность зоны σ мала и поэтому к процессам, идущим внутри нее, можно применять гипотезу стационарности, т. е. считать, что внутри σ все явления описываются уравнениями, справедливыми для стационарных течений. Это можно пояснить так. Малость σ по сравнению с длинами волны возмущений означает медленность акустических колебаний по сравнению со скоростью протекания процессов в короткой области σ . Поэтому время, достаточное для того, чтобы внутри области σ произошли изменения и процесс установился, недостаточно для сколько-нибудь заметного изменения параметров течения вне ее, изменения, связанного с акустическими колебаниями. Процессы внутри σ как бы мгновенно «подстраиваются» к сравнительно медленным акустическим колебаниям.

Рассмотрим пересечение области σ элементом течения. Если написать закон сохранения энергии отдельно для элемента потока в системе отсчета, движущейся вместе с ним, и отдельно для центра тяжести этого элемента, то, используя уравнение неразрывности, нетрудно получить следующие равенства:

$$Q = \rho v c_v (T_2 - T_1) + \int_{\sigma} p dv, \quad (11.12)$$

$$P = \rho v \left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right) + \int_{\sigma} v dp. \quad (11.13)$$

Здесь Q — тепло, P — механическая энергия, подведенные к газу в области σ . Хотя в рассматриваемом случае $P < 0$, сохраним эту величину в формулах для большей общности получаемых результатов.

Очевидно, что разность полных потоков энергии (11.1) между плоскостями 1 и 2 равна

$$e_2 - e_1 = Q + P,$$

а

$$p_2 v_2 - p_1 v_1 = \int_{\sigma} p dv + \int_{\sigma} v dp. \quad (11.14)$$

Таким образом, составляющая потока энергии, «излучаемая» областью σ и равная $p_2 v_2 - p_1 v_1$, состоит из двух слагаемых. Первое из них связано с теплоподводом и изменением внутренней энергии (11.12), а второе — с подводимой механической энергией и изменением потока кинетической энергии (11.13).

Пусть величины p и v имеют гармонически изменяющиеся во времени составляющие δp и δv (11.2), причем период колебаний равен T . Тогда средняя акустическая энергия, излучаемая областью σ , запишется в виде

$$A_{\Sigma} = \frac{1}{T} \int_0^T (\delta p_2 \delta v_2 - \delta p_1 \delta v_1) dt. \quad (11.15)$$

На основании равенства (11.14) можно написать

$$A_{\Sigma} = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\int_{\sigma} \delta p d\delta v + \int_{\sigma} \delta v d\delta p \right] dt. \quad (11.16)$$

Величины, стоящие в скобках в равенствах (11.15) и (11.16), уже не являются гармоническими функциями времени.

Обозначив символом Δ периодические, но не гармонические составляющие, имеющие порядок δ^2 , напишем с использованием (11.12) и (11.13):

$$\int_0^T \left[\int_{\sigma} \delta p d\delta v \right] dt = \int_0^T \Delta [Q - \rho v c_v (T_2 - T_1)] dt, \quad (11.17)$$

$$\int_0^T \left[\int_{\sigma} \delta v d\delta p \right] dt = \int_0^T \Delta \left[P - \rho v \left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right) \right] dt. \quad (11.18)$$

Выше уже говорилось, что при термическом возбуждении звука механическая энергия к потоку не подводится и поэтому $P = 0$.

Воспользовавшись равенствами (11.16) — (11.18) и положив $P=0$, получим следующее выражение для потока акустической энергии, излучаемой областью σ :

$$A_{\Sigma} = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\Delta Q - \Delta q c_v (T_2 - T_1) - \Delta q v \left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right) \right] dt. \quad (11.19)$$

Выражение для A_{Σ} показывает, что акустические колебания могут поддерживаться за счет трех источников энергии — внешнего теплоподвода, потока внутренней энергии и потока кинетической энергии. Однако формула (11.12) говорит о том, что первые два источника родственны друг другу. Поэтому ниже будут рассматриваться только два источника энергии. Будем говорить, что энергия акустических колебаний может заимствоваться из тепловых членов (теплоподвод и внутренняя энергия) и из потока кинетической энергии.

§ 12. Энергия, сообщаемая колебательной системе при реализации элементарных процессов в зоне теплоподвода

Рассмотрим процесс, характеризуемый условием $\delta v_1 = \delta v = \delta v_2$. Тогда $d\delta v = 0$ и согласно формуле (11.17) два первых члена в равенстве (11.19) дадут нуль. Это означает, что вся энергия акустических колебаний заимствуется из кинетической энергии течения. Наоборот, при процессе, характеризуемом условием $\delta p_1 = \delta p = \delta p_2$, вся энергия акустических колебаний будет заимствоваться из тепловых членов — внешнего теплоподвода и внутренней энергии, переносимой течением. В каждом из этих двух случаев колебательная система будет использовать какой либо один источник энергии, и с этой точки зрения процессы в зоне теплоподвода, характеризуемые условиями $\delta v_1 = \delta v = \delta v_2$ и $\delta p_1 = \delta p = \delta p_2$, можно назвать элементарными. Нетрудно, однако, показать, что к элементарным процессам следует отнести более широкий класс процессов в зоне теплоподвода.

С точки зрения заимствования энергии из располагаемых источников приведенные выше процессы в зоне

теплоподвода, характеризующиеся условиями $\delta v_1 = \delta v - \delta v_2$ и $\delta p_1 = \delta p - \delta p_2$, эквивалентны более общим процессам, характеризующимся равенствами $\delta v_1 = \delta v_2$ и $\delta p_1 = \delta p_2$. Действительно, сравним, например, процессы с $\delta v_1 = \delta v_2$ и с $\delta v_1 = \delta v = \delta v_2$.

Если предположить, что на границах области σ все величины в обоих случаях изменяются одинаковым обра-

зом и значения $\frac{1}{T} \int_0^T \Delta P dt$ и $\frac{1}{T} \int_0^T \Delta Q dt$ совпадают, то

правые части равенств (11.17) и (11.18) будут численно совпадать. Одинаковыми будут, следовательно, и стоящие слева интегралы. Таким образом, процесс заимствования энергии для поддержания колебаний из располагаемых источников энергии не связан с характером изменения δp и δv вдоль области σ , а однозначно определяется значениями переменных на границах области σ при условии, что задана величина изменения среднего значе-

ния теплоподвода $\frac{1}{T} \int_0^T \Delta Q dt = \Delta Q_{\text{ср}}$ (предполагается $P = 0$).

Из (11.11) очевидно, что условия $\delta p_1 = \delta p_2$ и $\delta v_1 = \delta v_2$ совпадают с условиями $\delta X = 0$ и $\delta E = 0$.

Будем изучать, основываясь на сказанном, следующие элементарные процессы.

Первый элементарный процесс характеризуется условием $\delta p_1 = \delta p_2$, или $\delta X = 0$. Заимствование энергии происходит из внешнего теплоподвода и потока внутренней энергии.

Второй элементарный процесс характеризуется условием $\delta v_1 = \delta v_2$, или $\delta E = 0$. Заимствование энергии происходит из потока кинетической энергии.

Рассмотрим более подробно первый элементарный процесс, в котором вся энергия для поддержания автоколебаний заимствуется из тепловых членов (теплоподвод и внутренняя энергия). Условие $\delta p_1 = \delta p_2$ при сохранении неизменной величины $\Delta Q_{\text{ср}}$ выделяет целый класс процессов с одинаковым излучением акустической энергии областью σ . Для фактического вычисления потока акустической энергии $A_2 = A_1$ является безразличным, какой из конкретных процессов этого класса рассматривается.

Поэтому конкретизируем изменения δp внутри σ следующим образом: $\delta p_1 = \delta p = \delta p_2$. Тогда, согласно (11.18) (при $P = 0$), последний член правой части равенства (11.19) даст после интегрирования нуль и поэтому суммарный поток акустической энергии для первого элементарного процесса представится в виде

$$A_1 = \frac{1}{T} \int_0^T [\Delta Q + \Delta (q_1 v_1 c_v T_1 - q_2 v_2 c_v T_2)] dt = \\ = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\int_{\sigma} \delta p d\delta v \right] dt.$$

Поскольку вдоль области σ $\delta p = \text{const}$, имеем:

$$\int_{\sigma} \delta p d\delta v = \delta p (\delta v_2 - \delta v_1),$$

что приводит к равенству

$$A_1 = \frac{1}{T} \int_0^T (\delta v_2 - \delta v_1) \delta p dt = \frac{a_1}{T} \int_0^T \delta E \delta p dt. \quad (12.1)$$

Последнее выражение написано с помощью условий (11.14).

Физический смысл полученного соотношения весьма прост. Величина $\delta E = \frac{1}{a_1} (\delta v_2 - \delta v_1)$ характеризует колебательную составляющую процесса расширения некоторого объема, порескающего σ , а δp является колебательной составляющей давления в малой окрестности σ . Поэтому величина A_1 есть средняя работа расширения, сообщенная системе в процессе колебаний. Она будет положительной, если сдвиг по фазе между δE и δp не превышает $\frac{\pi}{2}$ по абсолютной величине. Последний вывод следует из формулы

$$A_1 = \frac{a_1}{2} \delta E |\delta p| \cos \psi_1, \quad (12.2)$$

где ψ_1 — фазовый сдвиг между δE и δp , (12.2) получается совершенно так же, как (11.5).

Как уже говорилось, равенства такого типа удобно записывать в виде скалярных произведений входящих в них векторов. В частности,

$$A_1 = \frac{a_1}{2} \delta p \delta E. \quad (12.3)$$

Чтобы построить диаграмму областей устойчивости, воспользовавшись равенствами (12.2) или (12.3), поступим следующим образом. Пусть излучение акустической энергии из открытых концов трубы отсутствует. Как было

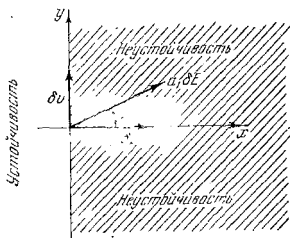


Рис. 17. Диаграмма границ устойчивости для первого элементарного процесса (потери отсутствуют).

показано в предыдущем параграфе, вектор δv в этом случае перпендикулярен к вектору δp . Направим вектор δp по оси x (рис. 17), а вектор δv — по оси y . Так как δv_1 может не совпадать с δv_2 , то условимся наносить на диаграмму δv_1 . Положение δE на этой диаграмме полностью определяется углом ψ_1 . Что касается абсолютных величин δp , δv и δE , то они могут быть в известном смысле неопределенными. Действительно, если задача решается без формулирования начальных условий, то, как было указано в § 8, решение не даст величин амплитуд. Это положение можно уточнить в том смысле, что решение для каждой гармоникки получается с точностью до неопределенного множителя; амплитуда колебаний

каждой гармонике остается неопределенной, хотя соотношения между амплитудами δp , δv и других переменных определяются однозначно. Проиллюстрируем это известное из теории дифференциальных уравнений обстоятельство простым примером. Пусть при $\xi = \xi_1$ в течение расположен узел давления $\bar{p} = 0$. При заданной частоте β функции $\varphi_1(\xi_1)$ и $\varphi_2(\xi_1)$ (4.14) определены однозначно. Второе уравнение (4.13) дает при этом $\frac{A_p}{A_v} = -\frac{\varphi_2(\xi_1)}{\varphi_1(\xi_1)}$. Следовательно, хотя амплитуды A_p и A_v остаются неопределенными, отношение между ними определено.

Таким образом, диаграмма, приведенная на рис. 17, может быть построена с точностью до масштаба. Одну из величин можно выбрать произвольно, другие же определяются однозначно. Пусть, например, $\delta p = 1$ и δp направлено по оси x . Тогда каждый из векторов δv и δE будет иметь не только определенное направление, но и определенную величину. Такая диаграмма удобна тем, что дает наглядное представление об относительных величинах и фазовых сдвигах возмущенных параметров процесса.

Нанесем на диаграмму, построенную на рис. 17, границу устойчивости. Границей устойчивости будем называть годограф таких значений вектора δE , при которых колебания происходят с постоянной амплитудой. В рассматриваемом случае (отсутствие потерь) условия (11.9) и (11.10) примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} A_1 = 0 & \text{— граница устойчивости,} \\ A_1 > 0 & \text{— неустойчивость,} \\ A_1 < 0 & \text{— устойчивость.} \end{aligned} \right\} \quad (12.4)$$

Из равенства (12.2) следует, что границей устойчивости будет ось y ; правая полуплоскость диаграммы будет соответствовать значениям δE , которые возбуждают систему, а левая полуплоскость таким δE , при которых возникшие колебания гасятся. Следует напомнить, что векторы δp и δv будут перпендикулярны лишь при $A_1 = 0$. Поэтому при положениях конца вектора δE в точках плоскости (x, y), не лежащих на границе устойчивости, вектор δv_1 не будет более совпадать с осью y .

Соотношения (12.4), формула (12.2) и приведенная диаграмма позволяют следующим образом сформулировать условия возбуждения в первом элементарном процессе.

При $\delta X = 0$ ($\delta p_1 = \delta p_2$) и при отсутствии потерь акустической энергии система будет возбуждаться, если между δE и колебательной составляющей давления δp фазовый сдвиг по абсолютному значению менее $\frac{\pi}{2}$; если абсолютное значение этого сдвига заключено между $\frac{\pi}{2}$ и π , то колебания будут гаситься.

Полученный результат является обобщением критерия Рэлея на случай движущейся среды. Дело в том, что фаза δE и фаза колебательной составляющей теплоподвода δQ совпадают лишь для неподвижной среды. В неподвижной среде расширение нагреваемого объема, которое характеризуется величиной δE , точно следует за процессом внешнего теплоподвода δQ . Этот факт настолько очевиден, что не нуждается в особом доказательстве. Поэтому для неподвижной среды можно вместо δE брать δQ (если речь идет о фазовых сдвигах) и тогда приведенное выше условие возбуждения совпадет с критерием Рэлея. Для движущейся среды фазы δE и δQ могут отличаться. Это будет показано в следующей главе. Таким образом, сформулированные здесь условия возбуждения охватывают более общий случай, чем критерий Рэлея.

Найдем условия возбуждения в первом элементарном процессе для случая, когда потери акустической энергии R отличны от нуля, и, следовательно, область σ постоянно излучает акустическую энергию для компенсации этих потерь. В таком случае вместо соотношений (12.4) следует написать:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= R - \text{граница устойчивости,} \\ A_1 &> R - \text{неустойчивость,} \\ A_1 &< R - \text{устойчивость.} \end{aligned} \right\} \quad (12.5)$$

Взяв A_1 по формуле (12.2) и положив $|\delta p| = 1$, получим для границы устойчивости

$$R = \frac{a_1}{2} |\delta E| \cos \psi_1,$$

т. е. проекция вектора $a_1 \delta E$ на ось x остается постоянной и равной $2R$. Это дает диаграмму, приведенную на рис. 18. Границей устойчивости является прямая, перпендикулярная к оси x и отстоящая от начала координат на расстоянии $2R$.

Важным отличием полученной здесь диаграммы устойчивости от диаграммы устойчивости, приведенной на рис. 17, является то, что теперь нельзя сформулировать условия возбуждения, говоря лишь о фазовых сдвигах между δE и δp . При $a_1 \delta E < 2R$ возбуждение вообще невозможно, независимо от фазового сдвига ψ_1 (следует помнить, что речь идет здесь об относительных величинах $a_1 \delta E$ и R , так как при построении диаграммы принято $|\delta p| = 1$).

Условия возбуждения в рассмотренном случае трудно сформулировать так же просто, как и при $R = 0$. Поэтому приведем их в виде аналитических соотношений, воспользовавшись формулой (12.3).

При $\delta X = 0$ и потерях акустической энергии R система возбуждается, если $\frac{a_1}{2} \delta p \delta E > R$; колебания гасятся, если $\frac{a_1}{2} \delta p \delta E < R$.

Эта формулировка является наиболее общей для первого элементарного процесса.

В заключение следует обратить внимание на одну особенность возбуждения в первом элементарном процессе. Пусть колебательная составляющая теплоподвода δQ будет точно синусоидальной, а средний уровень суммарного теплоподвода Q_0 не изменит своего значения после начала акустических колебаний. Тогда $\Delta Q_{\text{ср}} = 0$ и вся энергия

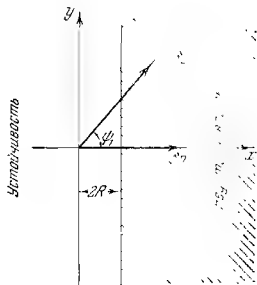


Рис. 18. Диаграмма границ устойчивости для первого элементарного процесса при наличии потерь.

на поддержание акустических колебаний будет заимствоваться из потока внутренней энергии. Интересным является в данном случае то, что мыслим процесс возбуждения акустических колебаний теплоподводом, при котором внешний теплоподвод не используется в качестве источника энергии для поддержания колебаний. Такой процесс невозможен, конечно, в неподвижном газе.

Обратимся теперь к рассмотрению второго элементарного процесса. Поскольку изучение этого типа возбуждения акустических колебаний теплоподводом во многом будет аналогично проведенному выше, изложим соответствующие результаты более кратко.

Как уже говорилось, второй элементарный процесс характеризуется условием $\delta E = 0$ или $\delta v_1 = \delta v_2$. Для фактического вычисления потока акустической энергии в этом случае (обозначим его A_2) конкретизируем изменение δv вдоль σ следующим образом: $\delta v_1 = \delta v = \delta v_2$. Тогда согласно формулы (11.17) два первых слагаемых в правой части равенства (11.19) дадут после интегрирования нуль и поэтому суммарный поток акустической энергии $A_2 = A_2$ будет равен

$$A_2 = \frac{1}{T} \int_0^T \left[-\Delta Q v \left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right) \right] dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\int_{\sigma} \delta v d\delta p \right] dt.$$

По условию $\delta v = \text{const}$. Следовательно,

$$A_2 = \frac{1}{T} \int_0^T (\delta p_2 - \delta p_1) \delta v dt = \frac{\kappa p_1}{T} \int_0^T \delta X \delta v dt. \quad (12.6)$$

Последнее выражение написано с помощью условий (11.11).

Физический смысл полученного соотношения также весьма прост. Величина $\delta X = \frac{\delta p_2 - \delta p_1}{\kappa p_1}$ характеризует колебательную составляющую сопротивления, действующего на течение в области σ , а δv является колебательной составляющей скорости в малой окрестности σ . Поэтому работа A_2 является работой сопротивления. Возбуждение системы в рассматриваемом случае зависит от того, может ли переменное сопротивление дать поло-

жительную работу, необходимую для поддержания колебаний.

Для вычисления потока акустической энергии A_2 можно написать формулы, аналогичные формулам (12.2) и (12.3):

$$A_2 = \frac{\kappa p_1}{2} |\delta X| |\delta v| \cos \psi_2, \quad (12.7)$$

$$A_2 = \frac{\kappa p_1}{2} \delta X \delta v. \quad (12.8)$$

(Здесь ψ_2 — фазовый сдвиг δX и δv .)

Построим для второго элементарного процесса диаграммы областей устойчивости по типу рассмотренных выше диаграмм.

При отсутствии излучения акустической энергии из концов трубы векторы δp и δv взаимно перпендикулярны; направив их так же, как на рис. 17, получим диаграмму, приведенную на рис. 19. В целях единообразия

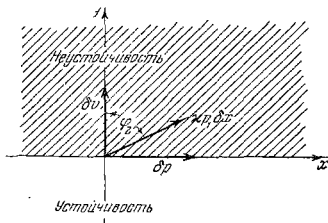


Рис. 19. Диаграмма границ устойчивости для второго элементарного процесса (потери отсутствуют).

эту диаграмму можно построить в масштабе $\delta p_1 : 1$. Область устойчивости отделяется от области неустойчивости на основании очевидных критериев:

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= 0 \text{ — граница устойчивости,} \\ A_2 &> 0 \text{ — неустойчивость,} \\ A_2 &< 0 \text{ — устойчивость.} \end{aligned} \right\} \quad (12.9)$$

Первое из написанных здесь условий вместе с формулой (12.7) или (12.8) показывает, что границей устойчивости является ось x , а второе условие (12.9) указывает на то, что положение конца вектора δX в верхней полуплоскости соответствует неустойчивому процессу.

Таким образом, условия возбуждения колебательной системы при реализации в зоне теплопровода второго элементарного процесса можно сформулировать следующим образом.

При $\delta E = 0$ ($\delta v_1 = \delta v_2$) и при отсутствии потерь акустической энергии система будет возбуждаться, если между δX и колебательной составляющей скорости δv фазовый сдвиг по абсолютному значению менее $\frac{\pi}{2}$; если абсолютное значение этого сдвига заключено между $\frac{\pi}{2}$ и π , то колебания гасятся.

В том случае, когда суммарные потери акустической энергии R отличны от нуля, вместо соотношений (12.9)

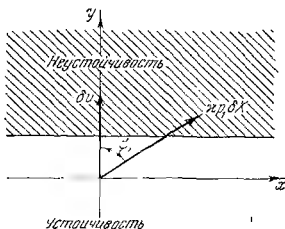


Рис. 20. Диаграмма границ устойчивости для второго элементарного процесса при наличии потерь.

следует написать критерии, аналогичные (12.5). Они дают следующие условия возбуждения для второго элементарного процесса: при $\delta E = 0$ и потерях акустической энергии R система возбуждается, если $\frac{\kappa p_1}{2} \delta X \delta v > R$;

колебания гасятся, если $\frac{\kappa p_1}{2} \delta X \delta v < R$. При этом диаграмма областей устойчивости примет вид, изображенный на рис. 20. Граница устойчивости пройдет параллельно оси x на некотором расстоянии от начала координат.

§ 13. Энергия, сообщаемая колебательной системе в общем случае

Элементарные процессы в зоне теплоподвода дают весьма простые условия возбуждения колебательной системы. Фактическая реализация элементарных процессов обычно маловероятна; эти процессы представляют, главным образом, принципиальный интерес, поскольку позволяют отделить случай возбуждения колебаний за счет энергии, находящейся в тепловой форме, от случая возбуждения колебаний за счет энергии, находящейся в механической форме.

Рассмотрим возбуждение колебательной системы, не накладывая на процесс внутри зоны теплоподвода никаких специальных условий. В общем случае как колебания скоростей δv_1 и δv_2 по разные стороны зоны σ , так и колебания давлений δp_1 и δp_2 будут различными. Суммарное излучение акустической энергии зоной σ можно, основываясь на равенствах (11.6) и (11.8), записать в виде

$$A_x = \frac{1}{2} (\delta p_2 \delta v_2 - \delta p_1 \delta v_1). \quad (13.1)$$

Полученная формула позволяет находить поток акустической энергии, падаемый областью σ по параметрам, заданным на границах этой области. Знание процессов, идущих внутри σ , в данном случае необязательно. Эта форма записи удобна, в частности, при экспериментальных исследованиях — нередко колебания скорости и давления по обе стороны зоны теплоподвода измерить значительно проще, чем разобраться в явлениях, идущих в самой зоне теплоподвода.

Формуле (13.1) можно придать и другой вид, которым удобно пользоваться, если надо найти A_x по параметрам

течения перед зоной теплоподвода и по характеристикам зоны теплоподвода. Путем подстановки δp_2 и δv_2 , найденных из первых двух равенств (11.11), в формулу (13.1), можно найти следующее выражение для A_Σ :

$$A_\Sigma = \frac{1}{2} (a_1 \delta p_1 \delta E + \kappa p_1 \delta v_1 \delta X + \kappa a_1 p_1 \delta E \delta X). \quad (13.2)$$

Однако ни формула (13.1), ни полученное выражение (13.2) не позволяют установить, какая доля потока A_Σ происходит от энергии, находящейся в тепловой форме, и какая — за счет энергии, находящейся в механической форме. Чтобы решить этот вопрос, естественно попытаться заменить реальный процесс последовательностью двух элементарных процессов с потоками акустической энергии A_1 и A_2 , так что $A_1 + A_2 = A_\Sigma$. Нетрудно сообразить, что если на участке, где осуществляется первый элементарный процесс, величина δp будет оставаться постоянной и равной δp_2 , а δv будет изменяться от δv_1 до δv_2 , в то время как на последующем участке будет сохраняться $\delta v = \delta v_1$, а δp будет изменяться от δp_1 до δp_2 , то, как видно из формулы (13.1), A_Σ приобретает пужную величину. Однако более внимательный анализ вопроса показывает, что задача решается не однозначно. Действительно, можно получить один и тот же суммарный эффект (величину потока акустической энергии, равную A_Σ), взяв две различные последовательности элементарных процессов: описанную выше или обратную ей (т. е. сначала изменить вариацию давления δp , а затем вариацию скорости δv). Хотя суммарный поток, излучаемый областью A_Σ акустической энергии, и будет в обоих случаях одним и тем же, составляющие его слагаемые A_1 и A_2 изменятся.

Выход из этого положения возможен путем приближения фиктивных схем к реальным. В действительности при теплоподводе изменение скорости и давления происходит одновременно. Поэтому естественно разбить весь процесс на множество чередующихся элементарных процессов.

В рассматриваемом случае к течению внутри области теплоподвода σ применимы обычные законы гидравлики и поэтому уравнение неразрывности и уравнение импуль-

сов можно записать в форме

$$qv = q_1 v_1,$$

$$p = (p_1 + q_1 v_1^2) - q_1 v_1 v.$$

Величины без индексов характеризуют параметры течения в некотором сечении внутри σ . На правой границе области σ они достигают значений q_2 , v_2 и p_2 . Из последнего равенства видно, что давление p и скорость v связаны линейной зависимостью и, следовательно, если p изменяется от p_1 до p_2 , а v от v_1 до v_2 , то равным долям изменения p соответствуют равные доли изменения v . Иными словами, когда в некотором сечении внутри σ давление p достигает величины

$$p = p_1 + \theta (p_2 - p_1) \quad (0 < \theta < 1),$$

то скорость v достигнет в том же сечении значения

$$v = v_1 + \theta (v_2 - v_1).$$

Последние два соотношения линейны относительно p и v , поэтому они справедливы и для вариаций давления δp и скорости δv в некотором сечении внутри σ : если

$$\left. \begin{aligned} \delta p &= \delta p_1 + \theta (\delta p_2 - \delta p_1), \\ \delta v &= \delta v_1 + \theta (\delta v_2 - \delta v_1) \end{aligned} \right\} \quad (0 < \theta < 1). \quad (13.3)$$

Если сравнить эти формулы с соотношениями (11.11), то легко видеть, что равным долям изменения δE соответствуют равные доли изменения δX . Это позволяет построить такое чередование двух элементарных процессов, которое в пределе совпадет с фактическим процессом, происходящим в области теплоподвода σ .

На рис. 21 дана схема такого процесса. Разобьем всю зону σ на множество последовательных сечений. Границами области σ будут сечения 1 и $2n$. (Здесь удобнее обозначить правое граничное сечение области σ не 2, а $2n$.) Пусть при переходе от сечения 1 к сечению $2n$ вариации давления и скорости δp и δv изменяются на следующие величины:

$$\Delta \delta p = \delta p_{2n+1} - \delta p_1,$$

$$\Delta \delta v = \delta v_{2n+1} - \delta v_1.$$

Разобьем процесс между сечениями 1 и $2n$ на $2n$ чередующихся элементарных процессов. В n из них пусть одинаковым образом изменяется только вариация скорости, в других n — только вариация давления.

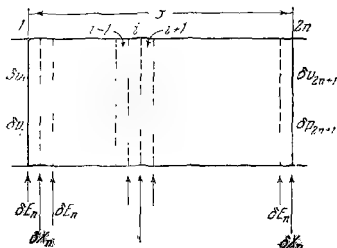


Рис. 21. Схема чередования элементарных процессов внутри зоны σ .

Для первого типа элементарных процессов можно написать:

$$\delta v_i - \delta v_{i-1} = \frac{\Delta \delta v}{n} = \frac{a_1 \delta E}{n} = \delta E_n \quad (i = 2, 4, 6, \dots). \quad (13.4)$$

а для второго —

$$\delta p_{i+1} - \delta p_i = \frac{\Delta p}{n} = \frac{\kappa p_1 \delta X}{n} = \delta X_n \quad (i = 2, 4, 6, \dots). \quad (13.5)$$

Из приведенных формул видно, что при каждом переходе через введенные фиктивные поверхности происходит изменение δv или δp на $\frac{1}{n}$ часть их общего изменения.

Следовательно, требуя, чтобы равным долям изменения δp соответствовали равные доли изменения δv [см. условия (13.3)], будет удовлетворяться здесь для любого сечения с ошибкой, не превышающей $\frac{1}{n}$ часть общего изменения δv и δp . При $n \rightarrow \infty$ эта ошибка будет

стремиться к нулю, а флуктуативный процесс неограниченно приближаться к реальному.

Найдем величины слагаемых полного потока акустической энергии A_1 и A_2 [см. формулы (12.1) и (12.6)]:

$$A_1 = \frac{1}{T} \left[\int_0^T \delta E_n \delta_1 p dt + \int_0^T \delta E_n \delta p_3 dt + \dots + \right. \\ \left. + \int_0^T \delta E_n \delta p_{2n-1} dt \right],$$

$$A_2 = \frac{1}{T} \left[\int_0^T \delta X_n \delta v_2 dt + \int_0^T \delta X_n \delta v_4 dt + \dots + \right. \\ \left. + \int_0^T \delta X_n \delta v_{2n} dt \right].$$

Если учесть, что

$$\begin{aligned} \delta p_1 &= \delta p_2, & \delta v_2 &= \delta v_3, \\ \delta p_3 &= \delta p_4, & \delta v_4 &= \delta v_5, \\ &\dots & \dots \end{aligned}$$

и, кроме того,

$$\begin{aligned} \delta p_2 &= \delta p_2 + \delta X_n, & \delta v_2 &= \delta v_1 + \delta E_n, \\ \delta p_4 &= \delta p_4 + \delta X_n, & \delta v_4 &= \delta v_3 + \delta E_n, \\ &\dots & \dots \end{aligned}$$

то выражения для A_1 и A_2 запишутся в виде

$$A_1 = \frac{1}{T} \left[\int_0^T \delta E_n \delta p_1 dt + \int_0^T \delta E_n (\delta p_1 + \delta X_n) dt + \dots + \right. \\ \left. + \int_0^T \delta E_n [\delta p_1 + (n-1) \delta X_n] dt \right],$$

$$A_2 = \frac{1}{T} \left[\int_0^T \delta X_n (\delta v_1 + \delta E_n) dt + \right. \\ \left. + \int_0^T \delta X_n (\delta v_1 + 2\delta E_n) dt + \dots + \int_0^T \delta X_n (\delta v_1 + n\delta E_n) dt \right].$$

Группируя должным образом слагаемые, найдем:

$$A_1 = \frac{1}{T} \int_0^T \{n \delta E_n \delta p_1 + [1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)] \delta E_n \delta X_n\} dt,$$

$$A_2 = \frac{1}{T} \int_0^T \{n \delta X_n \delta v_1 + [1 + 2 + 3 + \dots + n] \delta E_n \delta X_n\} dt.$$

Вспомнив известную формулу

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

в пределе при $n \rightarrow \infty$ получим с учетом (13.4) и (13.5) следующие окончательные выражения для A_1 и A_2 :

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(a_1 \delta E \delta p_1 + \frac{\kappa a_1 p_1}{2} \delta E \delta X \right) dt, \\ A_2 &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(\kappa p_1 \delta X \delta v_1 + \frac{\kappa a_1 p_1}{2} \delta E \delta X \right) dt. \end{aligned} \right\} \quad (13.6)$$

По аналогии с тем, как формула (11.4) была приведена к виду (11.6), полученные выражения можно записать и в виде скалярных произведений

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} \left[a_1 \delta E \delta p_1 + \frac{\kappa a_1 p_1}{2} \delta E \delta X \right], \\ A_2 &= \frac{1}{2} \left[\kappa p_1 \delta X \delta v_1 + \frac{\kappa a_1 p_1}{2} \delta E \delta X \right]. \end{aligned} \right\} \quad (13.7)$$

Как и следовало ожидать, сумма $A_1 + A_2$ дает выражение, совпадающее с тем, которое было найдено для A_Σ непосредственно (выражение (13.2)).

Формулы (13.6) и (13.7) позволяют не только определить общее количество акустической энергии A_Σ , излучаемое областью теплоподвода, но и выделить доли A_1 и A_2 , связанные с двумя независимыми источниками энергии, которые питают колебательную систему.

Сравнивая формулы (13.7) с полученными ранее выражениями (12.3) и (12.8), справедливыми для элементарных процессов, необходимо подчеркнуть, что в общем случае величина A_1 зависит не только от абсолютных величин

δE , δp_1 и фазового сдвига между ними. Даже если $A_2 = 0$ и энергия акустических колебаний заимствуется, таким образом, единственно из теплового источника, величина ее зависит и от δX , т. е. от вариации сопротивления. Это происходит потому, что при $\delta X \neq 0$ существенная для заимствования энергии из теплового источника величина δp меняется вдоль σ . Поэтому сдвиг по фазе между δE и значением δp в левом граничном сечении области σ уже не может определить характера всего процесса. Но в таком случае теряют смысл разного рода критерии возбуждения вроде критерия Рэлея, в которых говорится о необходимости известного фазового сдвига между давлением и теплоподводом и т. п., так как на протяжении зоны σ величина δp (в том числе и фаза δp) меняется, и становится бессмысленным само понятие фазы δp как некоторой общей характеристики зоны σ в целом. Совершенно такие же соображения можно привести и для случая $A_2 \neq 0$, $A_1 = 0$.

Чтобы закончить рассмотрение задачи об энергии, сообщаемой колебательной системе в общем случае, следовало бы построить диаграммы устойчивости наподобие тех, которые были приведены в предыдущем параграфе. Кроме того, полезно оценить относительную значимость каждого из двух источников энергии, питающих колебательную систему. Однако оба эти вопроса целесообразно рассмотреть после того, как будет дан метод фактического определения величин δE , δX и δS и рассмотрен вопрос о том, в каких случаях весьма сложные физические и химические процессы внутри зоны теплоподвода можно описывать при помощи этих трех безразмерных параметров.

§ 14. Возбуждение колебательной системы волнами энтропии

Помимо возмущений скорости и давления, которые объединяются понятием акустических возмущений, течением могут переноситься волны энтропии. В тех случаях, когда колебания в системе носят гармонический характер, возмущения энтропии, переносимые течением, имеют вид синусоидальных волн, как это было показано во второй главе.

Сами по себе возмущения энтропии никак не могут действовать на акустические колебания. Они могут, однако, явиться причиной появления акустических колебаний в тех случаях, когда на некоторых поверхностях волны энтропии вступают во взаимодействие с возмущениями давления или скорости¹⁾. Поясним сказанное примером. Пусть в некоторой области труба, по которой течет газ, перестает быть цилиндрической, а претерпевает достаточно крутое сужение, причем такое, что в минимальном сечении поток течет со скоростью звука. Применим гипотезу стационарности. Будем считать, что за время пересечения элементом жидкости области сужения ни давление, ни скорость перед входом в указанную область не изменяются, а течение в окрестности этой области в тот же промежуток времени можно считать изоэнтропическим. Сказанное означает, что период акустических колебаний велик по сравнению со временем движения элементарного объема жидкости вдоль области сужения, а длина волны энтропии, переносимая течением, велика по сравнению с длиной области сужения. Если принять эту гипотезу, то по известным законам газовой динамики отношение скорости течения к местной скорости звука в начальном сечении области сужения будет сохраняться величиной постоянной во все время колебаний. Это условие можно, в частности, принять за краевое условие для цилиндрического участка трубы, если труба имеет в области выходного конца сильное сужение.

Итак, пусть в некотором (например, концевом) сечении трубы выполняется условие

$$M = \frac{v}{a} = \text{const.} \quad (14.1)$$

Отсюда сразу получаем следующее равенство:

$$\delta\left(\frac{v}{a}\right) = \bar{v} - M \frac{\delta a}{a} = 0.$$

Воспользовавшись формулами (4.1), (4.2) и (4.9), трудно записать найденное соотношение в следующей

¹⁾ Настоящий параграф несколько выходит из общего плана главы. Он помещен здесь, так как задача решается в нем энергетическим методом.

форме:

$$2\bar{\sigma} - M\bar{s} - M(\kappa - 1)\bar{p} = 0. \quad (14.2)$$

Условие (14.2) можно почти всегда заменять приближенным условием

$$2\bar{\sigma} - M\bar{s} = 0, \quad (14.3)$$

поскольку коэффициент при $\bar{p}$ мал для обычных течений.

Найдем поток акустической энергии A'' в концевом сечении

$$A'' = \frac{1}{T} \int_0^T \delta p \delta v dt. \quad (14.4)$$

В соответствии с условием (14.3) и с учетом формул (14.1) и (4.8) здесь

$$\delta v = \frac{v}{2c_p} \delta s. \quad (14.5)$$

Пусть

$$\begin{aligned} \delta p &= A_p \sin \omega t \quad A_p > 0, \\ \delta s &= A_s \sin(\omega t + \psi) \quad A_s > 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$A'' = \frac{v}{2Tc_p} \int_0^T \delta p \delta s dt = \frac{v}{4c_p} A_p A_s \cos \psi. \quad (14.6)$$

Таким образом, знак A'' зависит от ψ , т. е. от сдвига по фазе между колебаниями давления и энтропии в окрестности критического сужения течения. При $|\psi| < \frac{\pi}{2}$ $A'' > 0$, иначе говоря, акустическая энергия движется к выходному сечению и, следовательно, в окрестности сужения происходит поглощение акустической энергии. При $\frac{\pi}{2} < \psi < \pi$ $A'' < 0$, акустическая энергия движется от концевой сечения к середине трубы, т. е. в окрестности выходного конца акустическая энергия генерируется.

Физически процесс генерирования акустических волн является следствием периодического «запирания» сопла газовым потоком, имеющим волнообразно распределенную по оси течения температуру (энтропию). При прочих

равных условиях величина среднего потока акустической энергии A'' возрастает пропорционально A_s , т. е. она будет увеличиваться по мере увеличения амплитуды колебаний энтропии. Сколько-нибудь значительные колебания энтропии мыслимы лишь как результат колебательного теплоподвода в зоне горения. Следовательно, в отсутствие теплоподвода условия возбуждения должны очень мало зависеть от условий на выходном конце.

В рассматриваемом примере возбуждение акустических колебаний волнами энтропии происходило лишь потому, что существовало некоторое сечение трубы, в котором поддержание постоянного значения отношения $\frac{v}{a}$ требовало колебательного изменения v , поскольку местная скорость звука a (однозначно связанная с местным значением температуры) имела гармоническую составляющую. Волны энтропии, проходя через это сечение, как бы вызывали к жизни возмущения скорости течения, т. е. акустические колебания. В других случаях процессы, ведущие к подобной связи волн s с волнами p и v , могут быть иными, но это всегда будет какое-то физическое явление, в котором изменение энтропии связано с изменением скорости или давления, или обеих этих величин. Поскольку в линейной постановке задачи в самом одномерном течении никакого взаимодействия акустических колебаний с волнами энтропии не происходит (это видно, в частности, из уравнений (4.4)), то реализация такого взаимодействия возможна лишь в зоне теплоподвода или на концах трубы (или в иных сечениях, где течение газа испытывает какие-либо внешние воздействия).

Таким образом, волны энтропии способны возбудить акустические колебания не непосредственно, а лишь косвенно.

Одним из способов сужения течения, которое рассматривалось выше, является сопло Лаваля, помещенное на выходе из трубы. Полученный выше вывод говорит о том, что если к соплу будет притекать газ с периодически изменяющейся температурой, то это может возбудить акустические колебания. Из сказанного вовсе не следует, что сопло Лаваля всегда способствует возникновению неустойчивости. Напротив того, оно является в обычных

условиях (при изоэнтропическом течении) слабым демпфером акустических колебаний. Действительно, положим $s=0$. Тогда из формулы (14.2) следует, что

$$\delta v = \frac{\kappa-1}{2\kappa} \frac{v}{p} \delta p.$$

Согласно формуле (14.4) это дает

$$A'' = \frac{(\kappa-1)v}{4\kappa p} (\delta p)^2.$$

Полученное выражение всегда положительно. Это говорит о том, что поток акустической энергии A'' всегда течет к соплу, т. е. из трубы во внешнее пространство, что и указывает на демпфирующие свойства сопла Лавала.

В заключение следует указать на то, что генерирование акустической энергии в выходном сечении за счет волн энтропии, которые образовались, например, в зоне теплоподвода, а затем сплывут течением к выходному концу, предполагает, что возникшие волны энтропии не исчезают и не сглаживаются за время движения от области теплоподвода до выходного конца трубы. Это полностью соответствует свойствам одномерного течения идеального газа. Однако в действительности при течении вязкого и теплопроводного газа волны энтропии будут сглаживаться и исчезать по мере перемещения по трубе. Важно при этом отметить, что если учет вязкости и теплопроводности сравнительно мало сказывается на акустических свойствах течения, то влияние вязкости и теплопроводности на распространение волн энтропии значительно более существенно. Не исключено поэтому, что если зона теплоподвода сильно удалена от выходного конца трубы, описанный выше эффект возбуждения акустических колебаний за счет взаимодействия волн энтропии с концевым сечением вообще не будет наблюдаться.

Г Л А В А IV

РАСЧЕТНАЯ ИДЕАЛИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ В ЗОНЕ ГОРЕНИЯ

§ 15. Изменение возмущений при пересечении области горения

При рассмотрении процесса возбуждения акустических колебаний теплоподводом, которое проводилось в предыдущей главе, делалось три предположения: считалось, что неподвижная зона теплоподвода имеет малую протяженность по сравнению с длиной волны возбужденных колебаний, что процесс теплоподвода одномерен и что к процессам внутри области теплоподвода применима гипотеза стационарности.

Эти предположения не могут показаться слишком искусственными для таких, например, явлений, как возбуждение звука в трубе Рийке при помощи нагретой сетки. Однако, когда рассматривается возбуждение акустических колебаний пламенем, все эти допущения перестают быть очевидными.

Последние два предположения — одномерность процесса теплоподвода и гипотеза стационарности — становятся в большинстве случаев просто ошибочными. Что касается первого предположения — малой протяженности зоны теплоподвода, — то им следует пользоваться с известной осторожностью. В силу сказанного, выводы, полученные в предыдущей главе, справедливы лишь для сравнительно узкого класса явлений.

Задачей настоящей главы является разработка схемы расчетной идеализации процессов в зоне горения, свободной от ограничивающих предположений предыдущей главы, и распространение полученных ранее выводов на этот общий случай.

Из всех принятых раньше допущений сохраним лишь одно — будем считать протяженность зоны горения σ малой по сравнению с длиной трубы L (рис. 22). Уточним это предположение в том смысле, что, говоря о малости σ , будем иметь в виду не всю область горения, а лишь ту ее часть, в которой происходят заметные колебания теплоподвода. Обычно эта зона соответствует начальному участку области горения. В среднем за период на начальном

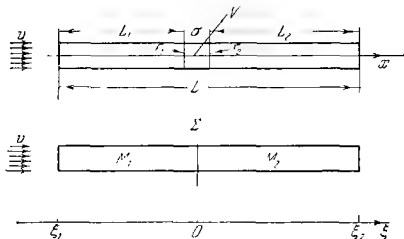


Рис. 22. Расчетная идеализация течения в трубе при наличии подогрева в области σ .

участке может выделяться мало тепла, в то время как колебательная составляющая тепловыделения будет существенной. Это естественно, поскольку начальные участки области горения, где горение еще не развилось полностью, особенно чувствительны к колебаниям параметров поступающей в область горения топливной смеси. Кроме того, в начальных участках области горения расположен фронт пламени, который может менять свое положение, и т. д. Что касается участков, расположенных на некотором удалении от фронта пламени, в глубине области горения, то хотя здесь и может происходить заметное выделение тепла, колебания теплоподвода значительно менее интенсивны.

Следовательно, говоря о зоне горения σ , будем всегда иметь в виду, что речь идет лишь о той части области теплоподвода, которая характеризуется значительными колебаниями теплоподвода. Остальную часть этой области будем называть зоной догорания, вкладывая в это понятие

отличный от обычного смысл. В рассматриваемых случаях в зоне догорания может выделяться заметная доля общего количества тепла, подводимого к газу в камере сгорания.

Итак, будем считать протяженность зоны σ малой по сравнению с общей длиной трубы L , но не будем пренебрегать нестационарностью и объемным (трехмерным) характером происходящих в ней процессов. Что касается участков L_1 и L_2 , лежащих слева и справа от σ , то будем продолжать считать, что процесс распространения возмущений в них одномерен и описывается выражениями, полученными во второй главе. Добавим лишь, что вдоль участка L_2 (горячий газ) вследствие догорания фактически могут изменяться температура и средняя скорость течения.

Чтобы пользоваться простыми формулами второй главы, будем осреднять температуру и скорость течения по участку L_2 . Как показывает оценка, это не может существенно сказаться на результатах расчетов.

При аналитическом исследовании акустических колебаний в трубе принятая схема явления создает значительные трудности. В основе этих трудностей лежит то, что на участках L_1 и L_2 процесс одномерен и описывается уравнениями акустики, в то время как внутри короткой зоны σ приходится учитывать трехмерность процесса горения и целый ряд сложных физических и химических закономерностей, свойственных горению. Зона σ не только делит все течение на два участка, но и существенно изменяет характер акустических возмущений в областях, лежащих слева и справа от нее.

Наглядное представление об этой роли зоны σ можно получить, рассматривая движение некоторого единичного акустического импульса вдоль трубы L . Пусть такой импульс движется по участку L_1 вправо. Достигнув зоны σ и вступив во взаимодействие с процессом горения, рассматриваемый импульс частично отразится и двинется влево по участку L_1 , а частично пройдет через зону σ . Однако импульс, вошедший в участок L_2 , будет отличаться по фазе и амплитуде от породившего его импульса.

Как видно из сказанного здесь, зона σ является областью, в которой происходит трансформация акустических

возмущений. Если характер этой трансформации почему-либо заранее известен, то расчет можно вести, непосредственно связывая акустические возмущения на граничных плоскостях F_1 и F_2 (см. рис. 22) и не интересуясь деталями явлений, происходящих внутри σ . Чтобы не внести при этом искажений в акустические свойства системы, зависящие от общей длины трубы L , можно соответственно удлинить участки L_1 и L_2 . Это рассуждение приводит к расчетной схеме, изображенной в нижней части рис. 22. Вся труба делится на две части не короткой зоной σ , а плоскостью Σ . Возмущения течения на левой стороне плоскости Σ совпадают с возмущениями на F_1 , а возмущения на правой стороне плоскости Σ с соответствующими величинами на F_2 . Поскольку амплитуды и фазы одноименных возмущений на F_1 и F_2 , вообще говоря, не совпадают, фиктивной плоскости Σ надо приписать свойства поверхности сильного разрыва газодинамических параметров течения. При такой идеализации процессов в трубе они будут всюду одномерными и будут подчиняться акустическим закономерностям. Свойства же плоскости Σ еще подлежат определению. Не надо думать, что введение плоскости Σ вместо зоны σ сильно искажает всю картину явления, поскольку достаточно сложный процесс сгорания, происходящий в некотором объеме, заменяется мгновенным подводом тепла на плоскости Σ . Более правильным будет иное представление. Зона σ как бы «извлекается» из течения и подробно изучается отдельно. Когда же свойства ее ясны, т. е. ясна связь между параметрами на F_1 и F_2 , то эти свойства формально приписываются левой и правой стороне плоскости Σ .

Вводя вместо реальной зоны горения σ поверхность сильного разрыва Σ , следует, конечно, наделить эту поверхность всеми существенными свойствами зоны теплоподвода σ . Введение поверхности разрыва вместо протяженной зоны теплоподвода является приемом, который использовался почти всеми авторами, занимавшимися изучением процесса термического возбуждения звука. Что касается свойств введенной поверхности Σ , то обычно они формулировались неточно, что искажало результаты исследования. Дадим поэтому строгий вывод свойств, которые следует приписать поверхности Σ , а для этого

найдем связь между параметрами течения на плоскостях F_1 и F_2 .

Прежде всего определим границы области σ . Будем называть зоной горения некоторый объем V , заключенный между двумя неподвижными плоскостями, нормальными к оси трубы, внутри которого происходит процесс горения. При этом длина зоны горения σ должна быть взята с учетом не только возможной криволинейности фронта пламени, но и с учетом колебаний фронта во времени — поверхность пламени не должна пересекать границ объема V ни в одном из своих положений.

Поскольку за пределами зоны горения V процесс принимается одномерным, такое же предположение следует сделать относительно характера течения в сечениях, ограничивающих объем V . Поэтому зона горения может иметь несколько большую протяженность, чем расстояние между крайними положениями поверхности пламени, достигаемыми в результате колебаний.

Как было показано во второй главе, процесс распространения возмущений описывается тремя переменными, зависящими от координаты и времени. Поэтому для «склеивания» распространяющихся слева и справа от зоны горения возмущений необходимо найти три независимые связи между возмущениями слева и справа от V . Для формулирования этих связей целесообразно применить законы сохранения. Воспользуемся уравнениями потоков массы, импульса и энергии в той форме, в которой они приведены в курсе Л. Ландау и Е. Лифшица¹⁾, дополнив эти уравнения рядом новых членов.

Во-первых, уравнение потока энергии следует писать с учетом химической энергии, переносимой течением. Здесь под этим понимается скрытая химическая энергия единицы массы горючей смеси q . Изменение величины q при пересечении зоны σ говорит о том, что часть этой энергии перешла в тепловую форму в результате процесса горения.

Во-вторых, в зоне теплоподвода σ могут быть расположены источники массы, импульса или энергии. Источники

¹⁾ Л. Ландау и Е. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, 1953 г.

массы может существовать, например, в виде системы форсунок, подающих горючее, если эти форсунки расположены не перед зоной горения, а внутри нее. Однако обычно горючая смесь готовится перед зоной горения, и поэтому реальный источник массы в зоне σ отсутствует. Даже в тех случаях, когда в зоне горения оказывается источник массы такого типа, им обычно можно пренебрегать. Поэтому, написав для общности соответствующее слагаемое M' в уравнении потока массы, в дальнейшем в настоящей книге будем почти всюду полагать $M' = 0$. Чтобы это утверждение не вызвало недоумения, укажем, что условие $M' = 0$ достаточно хорошо отражает процессы сжигания горючего в воздухе. В случае анализа работы жидкостных реактивных двигателей полагать $M' = 0$ было бы неверно. В теории жидкостных реактивных двигателей принято пренебрегать объемом, занимаемым топливом, находящимся в жидкой фазе. Поэтому наиболее естественной идеализацией процесса горения в таких двигателях является следующая схема. Капли топлива движутся по газовой среде до некоторого сечения камеры сгорания, где они мгновенно превращаются в газ (сгорают). Следовательно, в этом сечении находится мощный источник газов (источник массы). Это аналогично случаю, когда форсунки, подающие горючее в воздух, находятся в зоне горения, но в отличие от этого случая в жидкостных реактивных двигателях через форсунки подается не малая доля массы, поступающей в зону горения, а вся эта масса. Поскольку подробный анализ работы жидкостных реактивных двигателей не является целью настоящего исследования, всюду (кроме соответствующего параграфа гл. X) будет предполагаться что $M' = 0$.

Относительно источника импульса, расположенного внутри зоны σ , можно сделать следующие замечания. Наличие такого источника является вполне вероятным. Его можно представить себе в виде некоторого сопротивления R' , которое оказывают потоку различного рода конструктивные элементы (например, стабилизаторы), находящиеся в камере сгорания. Так как аэродинамические силы, приложенные к этим конструктивным элементам, не совершают внешней работы, можно сказать, что такой источник импульса не является источником энергии (сопротивления

только изменяют соотношение между количествами механической и тепловой энергии, переносимых потоком, но не меняют их суммы).

Что касается источника тепловой энергии Q' , который учитывается при написании уравнения потока энергии, то условимся понимать под ним теплоподвод, не связанный с горением, например, теплоподвод от нагретых сеток в трубе Рийке и т. п., либо теплоподвод от горючего, введенного непосредственно в объем V , минуя его границы.

Условимся также не делать в дальнейшем различия между понятиями «источник» и «сток» (последний будем рассматривать как отрицательный источник).

С учетом сделанных выше замечаний законы сохранения массы, импульса и энергии могут быть записаны в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \oint \rho v df &= - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + M', \\ \oint \Pi_{ik} df_k &= - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho v_i dV + P'_i, \\ \oint \rho v \left(\frac{v^2}{2} + c_p T + q \right) df &= - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \left(\frac{v^2}{2} + c_v T + q \right) dV + Q'. \end{aligned} \right\} \quad (15.1)$$

Здесь вектор df , соответствующий элементарной площадке df поверхности, ограничивающей объем V , направлен по внешней нормали к этой поверхности, а тензор плотности потока импульса определяется выражением

$$\Pi_{ik} = p \delta_{ik} + \rho v_i v_k,$$

где δ_{ik} — единичный тензор. Стоящие в левых частях равенств (15.1) интегралы берутся по неподвижной поверхности, ограничивающей зону горения V .

Обычно эти интегралы по поверхности вычисляются легко. Пусть ось потока совпадает с осью x , а зона горения будет цилиндрической, вырезанной из общего объема неподвижными плоскостями F_1 и F_2 (см. рис. 22). По оговоренному выше условию течение в сечениях F_1 и F_2

является одномерным. Следовательно, на поверхностях, ограничивающих объем V (плоскости F_1 и F_2 и боковая поверхность цилиндра), единственной компонентой скорости, отличной от нуля, будет v_x . Но тогда интегралы по ограничивающей области V поверхности сведутся к разности интегралов по плоскостям F_1 и F_2 .

Вводя индексы «единица» для параметров потока на F_1 (холодный поток) и индексы «два» для параметров потока на F_2 (горячий поток), получим с учетом того, что в силу принятой цилиндричностизоны горения площади сечения F_1 и F_2 равны между собой:

$$\left. \begin{aligned} \varrho_2 v_2 &= \varrho_1 v_1 - \frac{1}{F} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \varrho dV + M^*, \\ \varrho_2 v_2^3 + p_2 &= \varrho_1 v_1^3 + p_1 - \frac{1}{F} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \varrho v_x dV + P_x^*, \\ \varrho_2 v_2 \left(\frac{v_2^2}{2} + c_{p2} T_2 + q_2 \right) &= \varrho_1 v_1 \left(\frac{v_1^2}{2} + c_{p1} T_1 + q_1 \right) - \\ &\quad - \frac{1}{F} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \varrho \left(\frac{v^2}{2} + c_v T + q \right) dV + Q^*, \end{aligned} \right\} \quad (15.2)$$

где

$$M^* = \frac{M'}{F};$$

$$P_x^* = \frac{P_x'}{F};$$

$$Q^* = \frac{Q'}{F},$$

F — площадь поперечного сечения камеры.

В общем случае, в силу неполноты процесса сгорания, $q_2 \neq 0$. Введем понятие мгновенной эффективной полноты сгорания

$$\eta_{\text{сг}} = \frac{q_1 - q_2}{q_1}. \quad (15.3)$$

Нетрудно видеть, что при стационарном процессе или при $V=0$ введенное определение $\eta_{\text{сг}}$ совпадает с общепринятым определением полноты сгорания.

При нестационарном горении выражение (15.3) не имеет такого простого физического смысла, так как сгоревшая порция топливной смеси, пересекающая плоскость F_2 , могла иметь до сгорания (вследствие колебания q) другую теплотворную способность, чем смесь, пересекающая в это мгновение плоскость F_1 .

Воспользовавшись формулой (15.3) и первым равенством (15.2), последнему равенству системы (15.2) можно придать следующий вид:

$$\begin{aligned} \varrho_2 v_2 \left(\frac{v_2^2}{2} + c_{p_2} T \right) = \varrho_1 v_1 \left(\frac{v_1^2}{2} + c_{p_1} T_1 + \eta_{\text{сг}} q_1 \right) + \\ + q_1 (1 - \eta_{\text{сг}}) \frac{1}{F} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \varrho dV - \frac{1}{F} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \varrho \left(\frac{v^2}{2} + c_v T + q \right) dV + Q^* \end{aligned} \quad (15.4)$$

(здесь $M^* = 0$).

Следуя принятому методу, проведем линеаризацию полученной системы уравнений. В результате будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \varrho_2 \delta v_2 + v_2 \delta \varrho_2 &= \varrho_1 \delta v_1 + v_1 \delta \varrho_1 - \frac{1}{F} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \varrho dV + \delta M^*, \\ 2\varrho_2 v_2 \delta v_2 + v_2^2 \delta \varrho_2 + \delta p_2 &= 2\varrho_1 v_1 \delta v_1 + v_1^2 \delta \varrho_1 + \delta p_1 - \frac{1}{F} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \varrho v_x dV + \delta P_x^*, \\ \left(\frac{3}{2} \varrho_2 v_2^2 + \varrho_2 c_{p_2} T_2 + \varrho_2 q_2 \right) \delta v_2 + \\ + \left(\frac{v_2^3}{2} + v_2 c_{p_2} T_2 + v_2 q_2 \right) \delta \varrho_2 - c_{p_2} \varrho_2 v_2 \delta T_2 + \\ + \varrho_2 v_2 \delta q_2 &= \left(\frac{3}{2} \varrho_1 v_1^2 + \varrho_1 c_{p_1} T_1 + \varrho_1 q_1 \right) \delta v_1 + \\ + \left(\frac{v_1^3}{2} + v_1 c_{p_1} T_1 + v_1 q_1 \right) \delta \varrho_1 + c_{p_1} \varrho_1 v_1 \delta T_1 + \\ + \varrho_1 v_1 \delta q_1 - \frac{1}{F} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \varrho \left(\frac{v^2}{2} + c_v T + q \right) dV + \delta Q^*. \end{aligned} \right\} \quad (15.5)$$

Если написать последнее уравнение системы (15.2) в форме (15.4), то соответствующее уравнение системы

(15.5) примет вид:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3}{2} \varrho_2 v_2^2 + \varrho_2 c_{p_2} T_2 \right) \delta v_2 + \left(\frac{v_2^2}{2} + v_2 c_{p_2} T_2 \right) \delta \varrho_2 + c_{p_2} \varrho_2 v_2 \delta T_2 = \\ & = \left(\frac{3}{2} \varrho_1 v_1^2 + \varrho_1 c_{p_1} T_1 + \varrho_1 \eta_{\text{сг}} q_1 \right) \delta v_1 + \\ & + \left(\frac{v_1^2}{2} + v_1 c_{p_1} T_1 + v_1 \eta_{\text{сг}} q_1 \right) \delta \varrho_1 + \\ & + c_{p_1} \varrho_1 v_1 \delta T_1 + \varrho_1 v_1 \eta_{\text{сг}} \delta q_1 + \varrho_1 v_1 q_1 \delta \eta_{\text{сг}} + \\ & - q_1 (1 - \eta_{\text{сг}}) \frac{1}{F} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \varrho dV - \frac{1}{F} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \varrho \left(\frac{v^2}{2} + c_p T + q \right) dV + \delta Q^*. \end{aligned} \quad (15.6)$$

Воспользовавшись соотношениями (4.8), приведем систему уравнений (15.5) к безразмерному виду, причем в первом уравнении положим $\delta M^* = 0$, а последнее уравнение этой системы запишем в форме (15.6). Учитывая то, что согласно равенству (4.9) $\bar{s} = \bar{p} - \bar{q}$ и что для невозмущенного течения стоящие в правых частях равенств (15.2) частные производные по времени от интегралов обращаются в нули, получим следующую систему¹⁾:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{M_2} \bar{v}_2 + \bar{p}_2 - \bar{s}_2 = \frac{1}{M_1} \bar{v}_1 + \bar{p}_1 - \bar{s}_1 + \bar{J}_1, \\ & 2v_2 + \left(M_2 + \frac{1}{M_2} \right) \bar{p}_2 - M_2 \bar{s}_2 = \\ & = \frac{1}{n} \left[2\bar{v}_1 + \left(M_1 + \frac{1}{M_1} \right) \bar{p}_1 - M_1 \bar{s}_1 - M_1 \bar{J}_2 + M_1 \bar{P}_x^* \right], \\ & \left(3M_2 + \frac{2}{(\kappa-1)M_2} \right) \bar{v}_2 + \left(M_2^2 + \frac{2\kappa}{\kappa-1} \right) \bar{p}_2 - M_2^2 \bar{s}_2 = \\ & = \frac{1}{n^2} \left[\left(3M_1 + \frac{2}{(\kappa-1)M_1} + \frac{1}{M_1} Q_1 \right) \bar{v}_1 + \right. \\ & + \left(M_1^2 + \frac{2\kappa}{\kappa-1} + Q_1 \right) \bar{p}_1 - (M_1^2 + Q_1) \bar{s}_1 + \\ & \left. + Q_1 (\eta_{\text{сг}} + \bar{q}_1) + 2M_1^2 \bar{J}_3 + 2M_1^2 \bar{Q}^* \right]. \end{aligned} \quad (15.7)$$

¹⁾ Чтобы упростить запись системы, здесь и всюду далее не делается разницы между κ_1 и κ_2 — показателями адиабаты в холодном и горячем газе. При желании это всегда легко учесть.

Здесь

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= \frac{2\eta_{cr}q_1}{a_1^2}, \quad \bar{\eta}_{cr} = \frac{\delta\eta_{cr}}{\eta_{cr}}, \quad \bar{q}_1 = \frac{\delta q_1}{q_1}, \\ \bar{P}_x^* &= \frac{\delta P_x^*}{Q_1 v_1^2}, \quad \bar{Q}^* = \frac{\delta Q^*}{Q_1 v_1^2}, \quad n = \frac{a_2}{a_1}, \\ \bar{J}_1 &= -\frac{1}{Q_1 v_1 F} \frac{\partial}{\partial i} \int_V q dV, \\ \bar{J}_2 &= -\frac{1}{Q_1 v_1^2 F} \frac{\partial}{\partial t} \int_V q v_x dV, \\ \bar{J}_3 &= -\frac{1}{Q_1 v_1^2 F} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_V q \left(\frac{v^2}{2} + c_v T + q \right) dV - \right. \\ &\quad \left. - q_1 (1 - \eta_{cr}) \frac{\partial}{\partial t} \int_V q dV \right]. \end{aligned} \right\} \quad (15.8)$$

В написанных формулах Q_1 , v_1 , η_{cr} и q_1 соответствуют невозмущенному процессу; никаких дополнительных индексов для обозначения параметров стационарного течения здесь не используется.

Слагаемые $\bar{P}_x^*$ и $\bar{Q}^*$ в системе (15.7), как правило, будем опускать, так как первое из них не играет заметной роли в процессе вибрационного горения, а второе (соответствующее теплоподводу, не связанному с пересечением горючим границ области V) проявляется лишь в специальных случаях (возбуждение колебаний нагретыми сетками, введение горючего непосредственно в зону сгорания).

Входящая в третье уравнение системы (15.7) величина $Q_1 = \frac{2\eta_{cr}q_1}{a_1^2}$ не является независимой. Она полностью определяется заданием параметров течения слева и справа от σ . Для установившегося потока третьему уравнению системы (15.2) при $Q^* = 0$ можно придать следующий вид:

$$Q_1 \frac{v_1^3}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} p_1 v_1 + Q_1 v_1 (q_1 - q_2) = Q_2 \frac{v_2^3}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} p_2 v_2.$$

После деления обеих частей равенства на $\frac{Q_1 v_1^3}{2}$, с уче-

том того, что $\frac{p}{\rho v^2} = \frac{1}{\kappa M^2}$, сразу получаем

$$Q_1 = \frac{2(q_1 - q_2)}{a_1^2} = n^2 \left(M_2^2 + \frac{2}{\kappa - 1} \right) - \left(M_1^2 + \frac{2}{\kappa - 1} \right). \quad (15.9)$$

Величина $n = \frac{a_2}{a_1}$ может быть (при $P_x^* = 0$ и $M^* = 0$) найдена из первых уравнений (15.2) для установившегося потока:

$$n = \frac{\frac{1}{\kappa M_1} + M_1}{\frac{1}{\kappa M_2} + M_2}. \quad (15.10)$$

Таким образом, пользуясь формулами (15.9) и (15.10), можно представить все коэффициенты системы (15.7) в функции M_1 и M_2 — чисел Маха стационарного течения слева и справа от σ .

Система уравнений (15.7), так же как и исходная система (15.1), справедлива не только для зоны горения малой протяженности, но и для любого, сколь угодно большого участка течения. Введенное выше предположение о малой протяженности зоны горения оказывается существенным из следующих соображений. Как уже говорилось, в невозмущенном течении $\bar{J}_1 = \bar{J}_2 = \bar{J}_3 = 0$. В возмущенном течении эти величины, вообще говоря, отличны от нуля и зависят от распределения по рассматриваемому объему V возмущений q , v и T . Возмущения указанных параметров могут быть связаны как с акустическими процессами, так и с процессом горения. Если доля первых пренебрежимо мала, то величины $\bar{J}_1$, $\bar{J}_2$ и $\bar{J}_3$ в уравнениях (15.7) зависят только от процесса горения. Это обстоятельство чрезвычайно существенно, так как лишь в этом последнем случае можно провести мысленную операцию «извлечения» зоны σ из трубы L , нужную для того, чтобы связать между собою параметры течения на границах σ . Ведь эта связь должна быть одинаковой для всех видов акустических возмущений, для всех частот, которые определяются (в зависимости от свойств участков L_1 и L_2) лишь после того, как свойства зоны σ уже сформулированы.

Следовательно, малую протяженность зоны σ надо понимать как малую протяженность по сравнению с длинами

волн акустических возмущений. Принятый здесь прием идеализации перестает быть справедливым для очень коротких волн, соответствующих высоким гармоникам. Однако это обстоятельство не ограничивает существенно применимость разбиваемого метода, поскольку высокие гармоники обычно не возбуждаются.

В тех случаях, когда зона теплоподвода, в которой происходят значительные колебания тепловыделения, велика по сравнению с длиной волны возмущения, можно ввести несколько поверхностей разрывов Σ , соответствующих долям зоны σ и отстоящим на должных расстояниях друг от друга. Такой же прием применим и в случае, когда колебания тепловыделения имеют место не в одной короткой зоне, а в двух или трех, удаленных на заметное расстояние друг от друга.

§ 16. Свойства плоскости теплоподвода Σ

Очевидно, что существенные для возбуждения акустических колебаний свойства плоскости Σ и зоны σ должны совпадать. Эти свойства записаны выше в виде системы (15.7), связывающей параметры течения $\bar{v}$, $\bar{\rho}$ и $\bar{s}$ на двух сторонах поверхности сильного разрыва Σ . Глядя на систему равенств (15.7), нетрудно убедиться, что вводимая вместо зоны σ фиктивная поверхность сильного разрыва Σ обладает особыми качествами.

Особенностью этой поверхности разрыва является то, что во всех трех уравнениях, описывающих ее свойства, наряду с переменными $\bar{\rho}$, $\bar{v}$, $\bar{s}$ фигурируют величины $\bar{J}_1$, $\bar{J}_2$ и $\bar{J}_3$, Q_1 , $\bar{\eta}_{\text{сг}}$ и q_1 . Если вспомнить, что первое из уравнений (15.7) является выражением закона сохранения массы, второе — закона сохранения импульса, а третье — закона сохранения энергии, то следует принять, что на поверхности разрыва Σ расположены источники массы, импульса и энергии, даже в случае $M^* = P_x^* = Q^* = 0$.

Действительно, поскольку зона σ сведена к плоскости Σ , величины $\bar{J}_1$, $\bar{J}_2$ и $\bar{J}_3$ уже нельзя трактовать как производные от интегралов по объему V , ибо этот объем равен нулю; их следует рассматривать в качестве интенсивностей источников, расположенных на Σ .

Это становится наиболее понятным, если обратиться к исходной системе уравнений, записанной в виде (15.2). Обозначим

$$J_1 = - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \varrho dV.$$

Тогда уравнение неразрывности примет вид

$$\varrho_2 v_2 = \varrho_1 v_1 + J_1.$$

Если учесть, что в схеме течения с поверхностью разрыва Σ ϱ_1 и v_1 относятся к левой стороне поверхности, а ϱ_2 и v_2 к ее правой стороне, то величина J_1 может рассматриваться только как интенсивность источника массы, расположенного на Σ . Совершенно аналогичные рассуждения можно провести и для двух других уравнений.

Следовательно, хотя внутри зоны горения источники массы и импульса могут фактически отсутствовать, их приходится вводить для фиктивной поверхности разрыва Σ , чтобы сохранить существенные свойства этой зоны. Характер этих фиктивных источников $\bar{J}_1$, $\bar{J}_2$ и $\bar{J}_3$ однозначно определяется формулами (15.8), т. е. реальным процессом внутри объема зоны горения V .

Таким образом, зону горения малой протяженности, со сколь угодно сложным процессом внутри нее, всегда можно заменить неподвижной поверхностью сильного разрыва Σ при условии, что на этой поверхности будут расположены фиктивные источники массы, импульса и энергии нужной интенсивности. Легко видеть, что при этом будут охвачены все возможные виды колебаний в трубе. Действительно, задавая произвольным образом значения v , p и s по обе стороны Σ , можно, как это видно из системы (15.7), связать их без нарушения трех основных законов сохранения, путем выбора соответствующих значений безразмерных интенсивностей источников массы, импульса и энергии.

Необходимо сделать следующие замечания. Составляющие всех источников делятся на фиктивные и реальные слагаемые. Как уже говорилось, реальным источником массы может быть горючее, вводимое в зоне горения

в воздушный поток, а реальным источником импульса — сопротивление стабилизаторов, форкамер и иных устройств, которые могут быть расположены в зоне горения. Однако обычно этими составляющими можно пренебрегать. Поэтому во многих случаях в этой книге говорится, что в зоне теплоподвода отсутствуют реальные источники массы и импульса.

Относительно источников энергии этого сказать нельзя — процесс горения дает мощный реальный источник теплоты. Рассмотрим поэтому поток тепловой энергии, порожденный источниками, расположенными внутри области σ более подробно. Его можно разбить на реальную и фиктивную составляющие. Если ограничиться лишь возмущениями потока энергии, то к реальной составляющей следует отнести $2M_1^2 Q^*$ — возмущение теплоподвода, не связанного с пересечением горючим границ области сгорания, сумму $Q_1 \left(\frac{1}{M_1} \bar{v}_1 + \bar{p}_1 - \bar{s}_1 \right)$ — возмущение теплоподвода, обусловленное изменением массы горючей смеси, поступающей в зону горения через ее границы, и $Q_1 (\bar{\eta}_{\text{сг}} + \bar{q}_1)$ — возмущение теплоподвода вследствие колебания полноты сгорания и теплотворной способности горючей смеси. Все эти составляющие можно объединить, написав

$$\bar{Q} = 2M_1^2 \bar{Q}^* + Q_1 \left(\frac{1}{M_1} \bar{v}_1 + \bar{p}_1 - \bar{s}_1 \right) + Q_1 (\bar{\eta}_{\text{сг}} + \bar{q}_1). \quad (16.1)$$

Слагаемое $2M_1^2 \bar{Q}^*$ в уравнении (15.7) дает фиктивный источник энергии (подобно тому как $\bar{J}_1$ и $\bar{J}_2$ — фиктивные источники массы и импульса), который вводится лишь для того, чтобы сохранить существенные свойства протяженной зоны горения после сведения ее к поверхности разрыва Σ . При этом следует иметь в виду, что, в отличие от $\bar{Q}$, энергия, связанная с фиктивной составляющей $\bar{J}_3$, может иметь не только тепловую, но и механическую или химическую форму, что следует, в частности, из выражения для $\bar{J}_3$ (15.8).

Сделаем еще одно почти очевидное замечание. В понятие «источник энергии» здесь вкладывается иной смысл,

чем в предыдущей главе, в которой исследовались источники энергии, питающие автоколебательную систему. Здесь речь идет о подводе энергии к газу в зоне теплоподвода, независимо от того, тратится эта энергия на возбуждение акустических колебаний, на нагрев или еще каким-либо образом. Кроме того, как видно из формул для $\bar{Q}$ и $\bar{J}_3$, речь идет лишь о переменной во времени составляющей источника энергии. Последнее нужно всегда иметь в виду, поскольку в зоне горения существует значительная постоянная во времени составляющая теплоподвода.

Таким образом, заменяя реальную зону горения с поверхностью сильного разрыва Σ , следует приписать последней ту же величину безразмерного возмущения внешнего теплоподвода $\bar{Q}$, которая свойственна зоне σ ($\bar{P}_x^*$ полагаем пренебрежимо малым) и, кроме того, считать, что на поверхности Σ расположены фиктивные источники массы, импульса и энергии с безразмерными интенсивностями $\bar{J}_1$, $\bar{J}_2$ и $\bar{J}_3$.

Физический смысл величин $\bar{J}_1$, $\bar{J}_2$ и $\bar{J}_3$ достаточно очевиден. Рассмотрим, например, $\bar{J}_1$. Поскольку зона горения фактически обладает известной протяженностью, и поскольку положение фронта пламени в ней может изменяться, количество горячих и холодных газов в этой зоне не будет неизменным. Следовательно, мгновенные значения расходов массы на входе в зону горения и на выходе из нее могут не совпадать, хотя при установившихся колебаниях в среднем за цикл они совпадут. Это эквивалентно существованию фиктивных источников массы на плоскости Σ с колеблющимся расходом, в среднем (за цикл) равным нулю. Совершенно аналогичные рассуждения можно провести и для $\bar{J}_2$ и $\bar{J}_3$. Здесь также могут колебаться количества импульса и энергии, заключенные в объеме V , и при сведении объема V к плоскости Σ это ведет к необходимости считать, что на Σ расположены фиктивные источники импульса и энергии со средним (за цикл) расходом, равным нулю.

Входящие в систему уравнений (15.7) величины $\bar{Q}$, $\bar{P}_x^*$, $\bar{J}_1$, $\bar{J}_2$, $\bar{J}_3$, которые характеризуют процесс нестационарного теплоподвода, могут быть определены лишь после

того, как будет задана картина процесса внутри зоны горения. Это составляет обычно главную трудность и требует постановки целой серии тонких экспериментов, например скоростной киносъемки зоны горения с одновременной безынерционной записью колебаний параметров газового течения. Иногда приписывается та или иная теоретическая схема процесса колебательного горения, которую надо изучать; в этом случае определение всех необходимых величин по формулам (15.8) оказывается более простым.

Рассмотрим ряд простейших случаев, которые позволяют проиллюстрировать использование формул, полученных в предыдущем параграфе, и помимо этого выявить некоторые интересные свойства зоны теплоподвода. Прежде всего обратимся к двум предельным случаям, которые позволяют обратить внимание на одно принципиально важное обстоятельство. Исследуем, с одной стороны, подвод тепла при пересечении потоком неподвижной плоскости, нормальной к оси течения, и с другой — подвод тепла при пересечении бесконечно тонкого фронта пламени, также нормального к оси течения, но свободно колеблющегося вместе с потоком.

Подвод тепла на неподвижной плоскости. Этому случаю соответствует возбуждение колебаний в трубе Рийке, поскольку в идеализированной схеме нагретую сетку можно представить в качестве неподвижной относительно стенок трубы плоскости, при прохождении через которую воздушный поток нагревается. Для камер сгорания такому случаю в какой-то мере отвечает густое расположение поджигающих источников в одной плоскости нормального сечения камеры, хотя здесь степень приближения идеализированной схемы к реальному процессу уже будет меньшей.

Особенностью рассматриваемого процесса является то, что объем зоны горения (или, в более общем случае, зоны теплоподвода) равен нулю. При этом, очевидно, $\bar{J}_1 = \bar{J}_2 = \bar{J}_3 = 0$, и на вводимой в расчет поверхности Σ будет располагаться только источник энергии, дающий возмущенную составляющую внешнего теплоподвода $\bar{Q}$. При горении возбуждение колебаний возможно за счет вариации полноты сгорания $\eta_{\text{сг}}$ и теплотворной способности

смеси q_1^{-1}]. Более подробно этот случай будет рассмотрен в следующей главе.

Для трубы Рийке в уравнение энергии войдет величина $\bar{Q}^*$, зависящая от теплоотдачи от сетки к воздуху.

Подвод тепла в плоском фронте пламени. Пусть фронт пламени, как уже указывалось выше, нормален к оси трубы и не закреплен относительно ее стенок. В установившемся режиме неподвижность поверхности

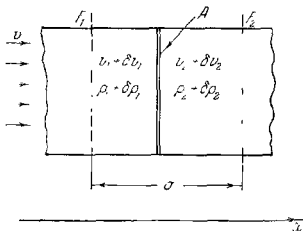


Рис. 23. Расчетная схема для зоны σ .

пламени относительно стенок достигается тем, что скорость потока смеси в трубе численно равна скорости распространения пламени. Предположим, что горючая смесь гомогенна и имеет всюду одинаковый состав, а процесс сгорания в бесконечно тонком фронте пламени происходит мгновенно и всегда с одинаковой полнотой, например, $\eta_{\text{сг}} = 1$. Очевидно, что в этом случае возмущения $\bar{\eta}_{\text{сг}} = \bar{q}_1 = 0$, и возбуждение системы будет связано с величинами $\bar{J}_1$, $\bar{J}_2$ и $\bar{J}_3$, отличными, вообще говоря, от нуля вследствие подвижности фронта пламени.

Для вычисления величин $\bar{J}_1$, $\bar{J}_2$ и $\bar{J}_3$ обратимся к рис. 23, на котором приведена схема горения для рассматриваемой

1) Слагаемое $Q_1 \left(\frac{1}{M_1} \dot{v}_1 + p_1 - s_1 \right)$, входящее в Q , интереса не представляет, так как оно однозначным образом связано с $\dot{v}_1$, $\bar{p}_1$ и $\bar{s}_1$ и не может свободно варьироваться как, например, $\eta_{\text{сг}}$ и q_1 .

мого случая. Плоский фронт пламени A колеблется между неподвижными сечениями F_1 и F_2 , причем скорость, плотность и другие параметры перед и за зоной горения равны соответственно $v_1 + \delta v_1$, $\rho_1 + \delta \rho_1$ и т. д.; $v_2 + \delta v_2$, $\rho_2 + \delta \rho_2$ и т. д. Поэтому

$$\bar{J}_1 = - \frac{1}{\rho_1 v_1 F} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{V_x} (\rho_1 + \delta \rho_1) dV + \int_{V_r} (\rho_2 + \delta \rho_2) dV \right],$$

где V_x — мгновенное значение «холодного» объема зоны горения (от F_1 до A), V_r — мгновенное значение «горячего» объема зоны горения (от A до F_2).

В силу того, что рассматриваются малые колебания, величина σ имеет порядок возмущений. Такой же порядок будут иметь и связанные с нею объемы V_x и V_r . Очевидно, слагаемыми $\delta \rho_1$ и $\delta \rho_2$ под знаками интегралов можно пренебречь. Из геометрических соображений ясно, что изменения V_x и V_r равны и противоположны по знаку:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_x} dV = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_r} dV.$$

Следовательно,

$$\bar{J}_1 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 v_1 F} \frac{\partial}{\partial t} V_r(t). \quad (16.2)$$

Буквально те же рассуждения следует применить и при вычислении $\bar{J}_2$ и $\bar{J}_3$. При этом в силу того, что для стационарного течения рассматриваемого типа уравнение неразрывности имеет вид $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$, величина $\bar{J}_2$ оказывается равной нулю.

$$\bar{J}_2 = \frac{\rho_1 v_1 - \rho_2 v_2}{\rho_1 v_1 F} \frac{\partial}{\partial t} V_r(t), \quad (16.3)$$

$$\bar{J}_3 = \frac{\rho_1 \left(\frac{v_1^2}{2} + c_v T_1 + q_1 \right) - \rho_2 \left(\frac{v_2^2}{2} + c_v T_2 + q_2 \right) - q_1 (1 - \eta_{cr}) (\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1 v_1 F} \times \\ \times \frac{\partial}{\partial t} V_r(t). \quad (16.4)$$

Входящая во все три полученные выражения величина $\frac{1}{F} \frac{\partial}{\partial t} V_r(t)$ является, как нетрудно сообразить, мгновен-

мым значением скорости распространения пламени относительно стенок трубы N . Поскольку положительное направление оси x совпадает с направлением скорости установившегося течения, можно написать

$$N = -\frac{1}{F} \frac{\partial}{\partial t} V_1(t). \quad (16.5)$$

Обозначим скорость распространения пламени относительно частиц газа через U . Заметим при этом, что введенная скорость U численно совпадает с обычно применяемой в теории горения скоростью распространения фронта пламени $U_{\text{гор}}$, отличаясь от нее знаком. Действительно, при используемом направлении оси x положительным значениям U соответствует движение вправо, в сторону горячих газов. Таким образом, скорость распространения пламени $U_{\text{гор}}$, которая направлена в сторону холодных газов, должна в принятых обозначениях соответствовать $U < 0$. Ниже будет почти всюду использоваться скорость U , однако все выводы легко сформулировать и для $U_{\text{гор}}$.

Запишем теперь очевидное кинематическое соотношение

$$v \pm U = N. \quad (16.6)$$

Тогда $\delta v \pm \delta U = \delta N$, но так как в установившемся режиме $N = 0$, то δN совпадает с N . Это позволяет записать равенство (16.6) в таком виде:

$$\delta v \pm \delta U = N. \quad (16.7)$$

Приведя последнее соотношение к безразмерному виду путем деления на скорость звука в холодном потоке a_1 , можно на основании формул (16.2) — (16.5) и (16.7) написать следующие выражения для $\bar{J}_1$, J_2 и $\bar{J}_3$:

$$\left. \begin{aligned} \bar{J}_1 &= A_1 (\bar{v}_1 \pm U_1), \\ \bar{J}_2 &= 0, \\ \bar{J}_3 &= A_3 (\bar{v}_1 \pm U_1). \end{aligned} \right\} \quad (16.8)$$

Здесь $\bar{U}_1 = \frac{\delta U}{a_1}$ — безразмерное возмущение скорости распространения пламени относительно холодного газа, а численные коэффициенты A_1 и A_3 находятся по

формулам:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{nM_2} - \frac{1}{M_1}, \\ A_3 &= \frac{nM_2}{M_1^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\kappa(\kappa-1)M_2^2} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{M_1} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\kappa(\kappa-1)M_1^2} + \frac{q_1 - q_2}{M_1^2 a_1^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (16.9)$$

Сравним теперь два рассмотренных случая. Нетрудно видеть, что они отличаются принципиально. В первом случае возбуждение колебаний возможно за счет возмущения внешнего теплоподвода $\bar{Q}$, а во втором — за счет возмущения скорости распространения пламени $\bar{U}_1$. Возникает естественный вопрос, нельзя ли свести любой эффект возмущения скорости распространения пламени $\bar{U}_1$ к некоторому эквивалентному случаю возмущения внешнего теплоподвода $\bar{Q}$? Ответ на этот вопрос может быть только отрицательным: в то время как колеблющееся тепловыделение, происходящее на неподвижной плоскости теплоподвода, даст отличное от нуля слагаемое лишь в третьем (энергетическом) уравнении систем (15.7), подвижность пламени приводит к появлению отличных от нуля слагаемых и в других уравнениях [в рассмотренном случае $\bar{J}_1 \neq 0$ и $\bar{J}_3 \neq 0$]. Поэтому принципиально невозможно заменить эффект колеблющегося пламени некоторым эквивалентным колеблющимся тепловыделением на неподвижной плоскости подвода тепла. Здесь можно привести такое простое соображение, иллюстрирующее бесперспективность попыток найти эквивалентные возмущения тепловыделения при произвольном процессе в зоне горения. Пусть будут заданы возмущения $\bar{p}$, $\bar{v}$ и $\bar{z}$ по обе стороны зоны горения. Для того чтобы связать их без нарушения трех законов сохранения, нужны три свободных независимых параметра, например $\bar{J}_1$, $\bar{J}_2$ и $\bar{Q} + 2M_1^2 \bar{J}_3$. В то же время такую связь невозможно, вообще говоря, установить, располагая одним параметром $\bar{Q}$. Этот вопрос почти очевиден и подчеркивается здесь лишь потому, что известны многочисленные попытки сводить все нестационарные процессы горения к некото-

рому эффективному колебанию тепловыделения, что почти всегда связано с нарушением законов сохранения массы и импульса.

Подвод тепла во фронте пламени произвольной конфигурации. В качестве третьего случая рассмотрим подвод тепла во фронте пламени A произвольной конфигурации, отличающемся тем, что он является непрерывной бесконечно тонкой поверхностью, отделяющей в однородной горючей смеси горячий газ от холодного (рис. 24). Пусть фронт пламени A совершает колебания между сечениями F_1 и F_2 , непрерывно меняя свою конфигурацию. Если предположить, что существование искривленного фронта A не влияет на течение перед ним, полнота сгорания всегда одна и та же, а за фронтом пламени плотность, давление и скорость всюду равны соответствующим параметрам течения в сечении F_2 ¹⁾, то все выводы, сделанные в предыдущем пункте, сохраняют свою силу. Единственным различием будет то, что величина $-\frac{1}{F} \frac{\partial}{\partial t} V_T(t)$ не будет больше мгновенной скорости распространения пламени относительно стенок трубы.

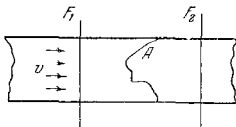


Рис. 24. К определению эффективной скорости распространения пламени при произвольной конфигурации фронта пламени.

Однако по аналогии с предыдущим можно обозначить это выражение $N_{эфф}$ и называть его эффективной скоростью движения фронта пламени относительно стенок. Соответственно и величина $\bar{U}$ может быть заменена на $\bar{U}_{эфф} = \bar{N}_{эфф} - \bar{v}_1$ (где $\bar{N}_{эфф} = \frac{N_{эфф}}{a_1}$) и названа эффективной скоростью распространения пламени относительно холодного газа. С введением этих понятий задача сразу сводится к формулам (16.8), в которых $\bar{U}_1$ заменяется на $\bar{U}_{эфф}$.

¹⁾ Эти предположения следует признать довольно грубыми. Они оправдываются тем, что члены $\frac{v^2}{2}$ играют относительно малую роль по сравнению с $c_v T$ и q .

Сохраняются и все остальные свойства разобранных выше случая колебаний плоского фронта пламени. Очевидно, в последнем случае $\bar{U}_{\text{эфф}} = \bar{U}_1$.

Дадим для двух последних случаев систему уравнений, аналогичную системе (15.7). Это можно сделать, подставив найденные значения $\bar{J}_1$, $\bar{J}_2$ и $\bar{J}_3$ (16.8) в уравнения (15.7). Однако поступим несколько иначе. Если воспользоваться значениями $\bar{J}_1$, $\bar{J}_2$ и $\bar{J}_3$, записанными в виде формул (16.2), (16.3) и (16.4), учесть определение (16.5) и кинематическое условие (16.6), то, пользуясь равенствами (15.8), нетрудно определить значения величин

$$\frac{1}{F} \frac{\partial}{\partial t} \int_V q dV, \quad \frac{1}{F} \frac{\partial}{\partial t} \int_V q v_x dV$$

и

$$\frac{1}{F} \frac{\partial}{\partial t} \int_V p \left(\frac{v^2}{2} + c_p T + q \right) dV.$$

Подставив их непосредственно в систему уравнений (15.2), получим условие на Σ в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} q_1 U_1 - q_2 U_2, \\ q_1 v_1 U_1 - p_1 = q_2 v_2 U_2 - p_2, \\ q_1 U_1 \frac{v_1^2}{2} - p_1 \left(\frac{1}{\kappa - 1} - v_1 \right) - q_1 U_1 (q_2 - q_1) \\ q_2 U_2 \frac{v_2^2}{2} + p_2 \left(\frac{U_2}{\kappa - 1} - v_2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (16.10)$$

При записи этой системы эффективная скорость распространения пламени $U_{\text{эфф}}$ не отмечается каким-либо особым индексом. Написанная система получена из общих уравнений (15.2). Нетрудно видеть, что она совпадает с обычными условиями, накладываемыми в газовой динамике на плоские поверхности сплошных разрывов, и отличается от них только слагаемым, соответствующим тепловыделению.

Дополним эту систему кинематическим условием

$$v_1 + U_1 = v_2 + U_2. \quad (16.11)$$

показывающим, что левая и правая стороны фронта пламени движутся относительно наблюдателя с одинаковой скоростью.

Проведем линеаризацию уравнений (16.10) и (16.11), переходя одновременно к безразмерным переменным. При этом учтем, что в установившемся течении $v_1 + U_1 = -v_2 + U_2 = 0$ и предположим, что вследствие однородности смеси и постоянства полноты горения величина $q_1 - q_2$ постоянна. После ряда опускаемых здесь простых преобразований получим следующую систему уравнений, описывающих свойства плоскости разрыва Σ через безразмерную вариацию скорости распространения пламени относительно холодной смеси:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{M_2} \bar{v}_2 + \bar{p}_2 - \bar{s}_2 &= \frac{1}{n M_2} \bar{v}_1 + \bar{p}_1 - s_1 + \left(\frac{1}{n M_2} - \frac{1}{M_1} \right) \bar{U}_1, \\ 2\bar{v}_2 + \left(M_2 + \frac{1}{M_2} \right) \bar{p}_2 - M_2 \bar{s}_2 &= \\ &= \frac{1}{n} \left[2\bar{v}_1 + \left(M_1 + \frac{1}{M_1} \right) \bar{p}_1 - M_1 s_1 \right], \\ \left(3M_2 + \frac{2}{(\kappa-1)M_2} \right) \bar{v}_2 + \left(M_2^2 + \frac{2\kappa}{\kappa-1} \right) \bar{p}_2 - M_2^2 \bar{s}_2 - \\ - \frac{1}{n^2} \left\{ \left[2M_1 + \frac{2}{\kappa M_1} + n \left(M_2 + \frac{2}{\kappa(\kappa-1)M_2} \right) \right] \bar{v}_1 + \right. \\ &+ \left(M_1^2 + \frac{2\kappa}{\kappa-1} + 2 \frac{q_1 - q_2}{a_1^2} \right) \bar{p}_1 - \\ &- \left(M_1^2 + 2 \frac{q_1 - q_2}{a_1^2} \right) \bar{s}_1 - \left[M_1 + \frac{2}{\kappa(\kappa-1)M_1} + \right. \\ &+ \left. \frac{2}{M_1} \frac{q_1 - q_2}{a_1^2} - n \left(M_2 + \frac{2}{\kappa(\kappa-1)M_2} \right) \right] U_1 \left. \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (16.12)$$

Нетрудно видеть, что если положить $\bar{U}_1 = -v_1$, т. е. как бы остановить фронт пламени, то получающаяся система совпадает, как и следовало ожидать, с системой (15.7) при условии, что в последней $\bar{P}_x^*$, $\bar{Q}^*$, $\bar{J}_1$, $\bar{J}_2$, $\bar{J}_3$ и $\bar{\eta}_{\text{сг}} + \bar{q}_1$ приращены нулю. Входящие в систему (16.12) величины $2 \frac{(q_1 - q_2)}{a_1^2}$ и n могут быть определены по формулам (15.9) и (15.10).

Система (16.12) удобна в тех случаях, когда в зоне горения задан не колеблющийся теплоподвод, а пространственные колебания фронта пламени. Обычно последние задаются через колебание некоторой эффективной скорости распространения пламени.

Напомним еще раз, что при пользовании системой (16.12) следует иметь в виду, что положительное значение $\bar{U}_1$ соответствует уменьшению абсолютного значения скорости распространения пламени по частицам газа (газ течет слева направо, а пламя бежит против течения). С учетом принятого правила знаков интенсификации процесса горения будут отвечать отрицательные $\bar{U}_1$.

Идеализированная схема вибрационного горения. В начале настоящего параграфа было показано, что вместо сложного процесса горения внутри зоны σ в расчетную схему можно ввести векторную плоскость теплоподвода Σ с тем, однако, условием, чтобы она содержала некоторые источники массы, импульса и энергии. Хотя такое представление процесса вибрационного горения не может вызвать возражений по существу, ему недостает наглядности.

Рассмотрим вопрос о том, как можно рациональным образом заменить действительный процесс горения внутри σ другим, простым и наглядным процессом, причем так, чтобы не потерять при переходе к этому новому процессу никаких существенных для возбуждения акустических колебаний свойств реального процесса горения. Приведенные несколько выше примеры позволяют предложить в качестве эффективного идеализированного процесса возмущенного горения процесс, складывающийся из двух основных: возмущения теплоподвода и возмущения положения плоского фронта пламени. Выше уже говорилось, что эти процессы нельзя свести друг к другу и поэтому из трех независимых величин, которые нужны для связи (без нарушения трех уравнений сохранения) произвольно задачных слева и справа от σ возмущений $\bar{p}$, $\bar{v}$ и $\bar{s}$, две уже имеются. В качестве третьей величины можно взять, например, вариацию $\bar{P}_x^*$, которую удобнее всего представить себе как вариацию гидравлического сопротивления камеры сгорания при колебаниях параметров набегающего на нее холодного течения.

Первое уравнение системы (15.7) содержит в качестве параметра, характеризующего возмущение процесса горения, $\bar{J}_1$, второе содержит $M_1(\bar{J}_2 + \bar{P}_x^*)$ и третье содержит $Q_1(\bar{\eta}_{cr} + \bar{q}_1) + 2M_1^2(\bar{J}_3 + \bar{Q}^*)$.

Если заменить некоторый реальный процесс, определяемый этими величинами, простым эквивалентным процессом предложенного здесь типа, то необходимо потребовать, чтобы соответствующие слагаемые во всех трех уравнениях (15.7) были равны таким же слагаемым в аналогичных уравнениях эквивалентного процесса. Это приведет к следующим трем равенствам (записанным с учетом формул (16.8)):

$$\left. \begin{aligned} \bar{J}_1 &= A_1 (\bar{v}_1 + \bar{U}_{1a}), \\ \bar{J}_2 + \bar{P}_x^* &= \bar{P}_{xg}^*, \\ Q_1 (\bar{\eta}_{cg} + q_1) + 2M_1^2 (\bar{J}_3 + \bar{Q}^*) &= \\ &= 2M_1^2 [A_3 (\bar{v}_1 + \bar{U}_{1a}) + \bar{Q}_3^*]. \end{aligned} \right\} \quad (16.13)$$

Величины $\bar{Q}_3^*$, $\bar{U}_{1a}$ и $\bar{P}_{xg}^*$ являются эквивалентными возмущениями теплоподвода, скорости перемещения плоского фронта пламени относительно частиц газа и гидравлического сопротивления зоны горения. Их легко определить из равенств (16.13)

$$\left. \begin{aligned} \bar{U}_{1a} &= \frac{\bar{J}_1}{A_1} - \bar{v}_1, \\ \bar{P}_{xg}^* &= \bar{P}_x^* + \bar{J}_2, \\ \bar{Q}_3^* &= \bar{Q}^* + \bar{J}_3 + \frac{Q_1}{2M_1^2} (\bar{\eta}_{cg} + q_1) - \frac{A_3}{A_1} \bar{J}_1. \end{aligned} \right\} \quad (16.14)$$

Таким образом, каким бы сложным ни был реальный процесс внутри σ , его всегда можно заменить некоторым эквивалентным, который складывается из эффективного возмущения теплоподвода $\bar{Q}_3^*$, возмущения скорости распространения некоторого эффективного плоского фронта пламени $\bar{U}_{1a}$ и эффективного возмущения гидравлического сопротивления камеры сгорания $\bar{P}_{xg}^*$. Такая замена возможна не только тогда, когда известны все тонкости идущих внутри σ процессов, позволяющие вычислить $\bar{J}_1$, $\bar{J}_2$, $\bar{J}_3$, $\bar{\eta}_{cg}$ и т. д. Достаточно знать (из эксперимента или каким-либо иным образом) $\bar{p}$, v и $\bar{s}$ по обе стороны σ , чтобы сразу найти эквивалентный процесс в зоне горения. Действительно, воспользовавшись равенствами (16.13),

можно исключить из уравнений (15.7) все величины, описывающие фактический ход сложного процесса горения внутри σ и заменить их соответствующими величинами эквивалентного простого процесса. Тогда знание $\bar{p}_1$, $\bar{v}_1$, s_1 , $\bar{p}_2$, $\bar{v}_2$ и $\bar{s}_2$ сразу позволяет найти из преобразованных уравнений (15.7) $\bar{U}_1$, $\bar{P}_x^*$ и $\bar{Q}^*$. Очень часто, особенно в теоретических исследованиях, пренебрегают суммой $\bar{P}_x^* + \bar{J}_2$ во втором уравнении системы (15.7). Тогда, очевидно, $\bar{P}_x^* = 0$ и процесс нестационарного горения полностью характеризуется эффективными значениями возмущения теплоподвода и скорости распространения плоского фронта пламени.

Обнаруженная здесь возможность введения в расчетную схему вместо сложного процесса в зоне горения σ простого эквивалентного процесса позволяет в дальнейшем изложении говорить лишь о возмущении теплоподвода и возмущении скорости распространения пламени. Читателю будет нетрудно разобраться самому, когда в этих случаях идет речь об «эффективных», а не о реальных величинах. Для упрощения записи ниже индексы «э» у $\bar{Q}^*$, $\bar{U}_1$ и $\bar{P}_x^*$ будут всюду опускаться.

Система уравнений (15.7) в случае описания процесса вибрационного горения при помощи величины $\bar{Q}^*$, $\bar{U}_1$ и $\bar{P}_x^*$ приобретает следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{M_2} \bar{v}_2 + \bar{p}_2 - \bar{s}_2 - \left(A_1 + \frac{1}{M_1} \right) \bar{v}_1 + \bar{p}_1 - \bar{s}_1 + A_1 \bar{U}_1, \\ 2\bar{v}_2 + \left(M_2 + \frac{1}{M_2} \right) \bar{p}_2 - M_2 \bar{s}_2 = \\ = \frac{1}{n} \left[2\bar{v}_1 + \left(M_1 + \frac{1}{M_1} \right) \bar{p}_1 - M_1 \bar{s}_1 + M_1 \bar{P}_x^* \right], \\ \left(3M_2 + \frac{2}{(n-1)M_2} \right) \bar{v}_2 + \left(M_2^2 + 2 \frac{n}{n-1} \right) \bar{p}_2 - M_2^2 \bar{s}_2 = \\ = \frac{1}{n^2} \left[\left(3M_1 + \frac{2}{(n-1)M_1} + \frac{1}{M_1} Q_1 + 2M_1^2 A_3 \right) \bar{v}_1 + \right. \\ \left. + \left(M_1^2 - 2 \frac{n}{n-1} + Q_1 \right) \bar{p}_1 - (M_1^2 + Q_1) \bar{s}_1 + \right. \\ \left. + 2M_1^2 (A_3 \bar{U}_1 + \bar{Q}^*) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (16.15)$$

Здесь величины A_1 и A_3 вычисляются по формулам (16.9). Если в зону горения поступает воздух, а не подготовленная горючая смесь (т. е. если смесь готовится внутри зоны σ , сводимой далее к плоскости Σ), то величина Q_1 обращается в нуль, поскольку в этом случае $q_1 = 0$.

В заключение надо пояснить одно свойство, которым должно обладать эффективное гидравлическое сопротивление P_x^* . Поскольку оно вводится для того, чтобы связать без нарушения закона сохранения импульса задаваемые, вообще говоря, произвольно возмущения параметров течения слева и справа от σ , то фаза $\bar{P}_x^*$ может не совпасть с фазой возмущения скоростного напора течения перед зоной σ . Это не должно смущать читателя, так как и фактическое гидравлическое сопротивление реальной камеры сгорания при нестационарном характере процесса горения вовсе не следует за изменением скоростного напора набегающего потока. Сложный характер течения в области интенсивного сгорания, связанный с периодическим вихреобразованием и с тем, что расположенные в зоне горения устройства (стабилизаторы и т. п.) то целиком, то частично обтекаются холодными и горячими струями газа, нарушают привычную для стационарных течений картину следования сопротивления за скоростным напором набегающего потока.

§ 17. Приведение условий на плоскости разрыва Σ к каноническому виду

Полученная выше система уравнений (15.7) [или (16.15)] может быть непосредственно использована для связи возмущенных параметров течения по разные стороны плоскости сильного разрыва Σ . Особый интерес представляет при этом такое написание этих связей, при котором оказалось бы удобным анализировать влияние процесса горения на возбуждение колебаний. Говоря точнее, желательно придать системе (15.7) такую форму, которая, с одной стороны, была бы достаточно простой, с другой стороны, наиболее полно передавала бы физическую сторону изучаемых процессов. Дело в том, что сами величины J_1 , J_2 , $\bar{J}_3$ и $\bar{Q}$ [так же как и $\bar{Q}^*$, $\bar{U}_1$ и $\bar{P}_x^*$ в уравнениях (16.15)] не являются первичными, и поэтому

наиболее рациональное написание системы (15.7) или (16.15) пока не очевидно.

Существенную помощь в этом вопросе может оказать энергетическая точка зрения на процесс возбуждения акустических колебаний теплоподводом, которая развивалась в предыдущей главе. Было показано, что элементарные процессы возбуждения колебательной системы за счет одного из двух источников энергии связаны с отличием от нуля разностей δp_1 , δp_2 и $\delta v_1 - \delta v_2$. Поэтому оказалось целесообразным записать связь между возмущениями параметров течения слева и справа от области теплоподвода при помощи системы равенств (11.11).

Будем называть запись (11.11) канонической и поставим своей целью приведение соотношений для плоскости разрыва Σ к каноническому виду. Предварительно приведем условия (11.11) к безразмерной форме

$$n\bar{v}_2 - \bar{v}_1 = \delta E, \quad m\bar{p}_2 - \bar{p}_1 = \delta X, \quad g\bar{s}_2 - \bar{s}_1 = \delta S. \quad (17.1)$$

Здесь $n = \frac{a_2}{a_1}$, $m = \frac{\kappa_2 p_2}{\kappa_1 p_1}$, $g = \frac{c_{p2}}{c_{p1}}$. В тех случаях, когда можно не учитывать изменения теплоемкости газа при его нагревании, $g = 1$, а $m = \frac{p_2}{p_1}$.

Система (15.7) приводится к каноническому виду путем несложных алгебраических преобразований. Положив $\bar{P}_x^* = 0$, придадим левым частям равенств тот же вид, который имеют левые части (17.1); в правых частях получим линейные функции переменных, входящих в систему (15.7). В результате будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} n\bar{v}_2 - \bar{v}_1 &= a_{11}\bar{v}_1 + a_{12}\bar{p}_1 + a_{13}\bar{s}_1 + b_{11}J_1 + b_{12}J_2 + \\ &\quad + b_{13}(2M_1^2\bar{J}_3 + Q), \\ m\bar{p}_2 - \bar{p}_1 &= a_{21}\bar{v}_1 + a_{22}\bar{p}_1 + a_{23}\bar{s}_1 + b_{21}J_1 + b_{22}J_2 + \\ &\quad + b_{23}(2M_1^2\bar{J}_3 + Q), \\ g\bar{s}_2 - \bar{s}_1 &= a_{31}\bar{v}_1 + a_{32}\bar{p}_1 + a_{33}\bar{s}_1 + b_{31}J_1 + b_{32}J_2 + \\ &\quad + b_{33}(2M_1^2\bar{J}_3 + Q). \end{aligned} \right\} \quad (17.2)$$

Значения коэффициентов a_{ik} и b_{ik} удобнее всего находить численно, в процессе приведения системы (15.7) к виду (17.2). Сравнивая равенства (17.1) и (17.2), легко найти выражения для δE , δX и δS . При этом сразу бросается в глаза, что величины δE , δX и δS состоят из двух групп слагаемых: одной, зависящей от возмущений параметров течения $\bar{v}_1$, $\bar{p}_1$ и $\bar{s}_1$ перед плоскостью Σ (перед зоной горения), и другой, зависящей от возмущений самого процесса горения ($\bar{J}_1$, $\bar{J}_2$, $\bar{J}_3$, $\bar{Q}$).

Поэтому естественно написать:

$$\left. \begin{aligned} \delta E &= \delta E_0 + \delta E', \\ \delta X &= \delta X_0 + \delta X', \\ \delta S &= \delta S_0 + \delta S', \end{aligned} \right\} \quad (17.3)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \delta E_0 &= a_{11}\bar{v}_1 + a_{12}\bar{p}_1 + a_{13}\bar{s}_1, \\ \delta E' &= b_{11}\bar{J}_1 + b_{12}\bar{J}_2 + b_{13}(2M_1^2\bar{J}_3 + \bar{Q}), \\ \delta X_0 &= a_{21}\bar{v}_1 + a_{22}\bar{p}_1 + a_{23}\bar{s}_1, \\ \delta X' &= b_{21}\bar{J}_1 + b_{22}\bar{J}_2 + b_{23}(2M_1^2\bar{J}_3 + \bar{Q}), \\ \delta S_0 &= a_{31}\bar{v}_1 + a_{32}\bar{p}_1 + a_{33}\bar{s}_1, \\ \delta S' &= b_{31}\bar{J}_1 + b_{32}\bar{J}_2 + b_{33}(2M_1^2\bar{J}_3 + \bar{Q}). \end{aligned} \right\} \quad (17.4)$$

Величины $\delta E'$, $\delta X'$ и $\delta S'$ характеризуют нестационарные процессы, идущие в зоне горения, и в этом смысле могут полностью заменить величины $\bar{J}_1$, $\bar{J}_2$, $2M_1^2\bar{J}_3 + \bar{Q}$. Что касается слагаемых δE_0 , δX_0 и δS_0 , то их можно рассматривать в качестве координат начала отсчета величин $\delta E'$, $\delta X'$ и $\delta S'$.

При таком способе написания условий на поверхности Σ может возникнуть недоумение следующего рода. В канонической записи (17.1) правые части (величины δE , δX и δS) зависят не только от процессов, идущих в зоне горения ($\delta E'$, $\delta X'$ и $\delta S'$), но и от характера колебаний в близлежащей окрестности зоны горения (δE_0 , δX_0 и δS_0). В то же время в предыдущей главе было показано, что величины δE , δX и δS определяют устойчивость процесса.

Получается, что возбуждение акустических колебаний связано не только с процессами внутри зоны теплоподвода.

Цело в том, что одни и те же процессы в зоне горения действительно дадут различный эффект, будучи поставлены в различные условия в смысле характера колебаний окружающей среды. Например, как уже было показано ранее, перподическое тепловыделение в неподвижном газе даст тем большие колебания, чем ближе плоскость подвода тепла расположена к пучности давления; будучи помещена в сечение, в котором расположен узел давления, поверхность теплоподвода вообще не возбудит системы (для простоты здесь не оговариваются фазовые условия возбуждения).

Следовательно, в принятой здесь форме записи учтены оба фактора — как процессы в зоне теплоподвода, так и характер колебаний в ее окрестности.

Следует, конечно, различать, что именно и в какой мере способствует развитию колебаний в каждом данном конкретном случае — процессы в зоне горения или особенность положения этой зоны относительно стоячих волн, возникших в системе.

Запись условий на Σ в виде канонических соотношений (11.11) или (17.1) привлекает своей простотой. Преимуществом ее является также то обстоятельство, что она непосредственно связана с энергетической сутью происходящих при возбуждении акустических колебаний процессов. Однако эта форма записи не является, конечно, единственно разумной. Безусловно, могут встречаться случаи, когда возмущения параметров за зоной теплоподвода — $\bar{v}_2$, $\bar{p}_2$ и $\bar{s}_2$ — оказывается желательным выразить непосредственно через $\bar{v}_1$, $\bar{p}_1$ и $\bar{s}_1$ и характеристики зоны горения. Система такого рода легко получается из равенств (17.2). Используя обозначения (17.4), ей можно придать следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_2 &= \frac{1}{\alpha} [(1 + a_{11}) \bar{v}_1 + a_{12} \bar{p}_1 + a_{13} \bar{s}_1 + \delta E'], \\ \bar{p}_2 &= \frac{1}{m} [a_{21} \bar{v}_1 + (1 + a_{22}) \bar{p}_1 + a_{23} \bar{s}_1 + \delta X'], \\ \bar{s}_2 &= \frac{1}{n} [a_{31} \bar{v}_1 + a_{32} \bar{p}_1 + (1 + a_{33}) \bar{s}_1 + \delta S']. \end{aligned} \right\} \quad (17.5)$$

§ 18. Источники энергии автоколебаний при произвольно сложном процессе в зоне теплоподвода

В § 11 было показано, что при одномерном характере течения внутри зоны теплоподвода существует два источника энергии, за счет которых поддерживаются акустические колебания — внешний теплоподвод и поток внутренней энергии (тепловые члены), с одной стороны, и поток кинетической энергии, с другой.

Поскольку в реальной зоне горения процесс не одномерен, остается неясным, насколько этот вывод справедлив и для более общего случая произвольно сложного процесса в зоне теплоподвода. Поэтому прежде, чем идти дальше, надо уточнить, насколько правомерным было приведение условий на Σ к виду (17.1) при произвольном процессе в зоне теплоподвода.

В рассматриваемом общем случае любой процесс в зоне горения может быть сведён, как это было показано выше, к процессу подвода к потоку в плоскости Σ энергии, импульса и массы. Чтобы иметь возможность как бы взглянуть на процессы, идущие «внутри» Σ , будем в настоящем параграфе рассматривать не плоскость Σ , а сколь угодно малую (но конечную) область σ , вдоль которой будут расположены источники массы импульса и энергии. Течение внутри σ будем считать одномерным, а вследствие малости σ считаем применимой гипотезу стационарности. Этот прием позволяет приблизить рассмотрение течения, пересекающего плоскость Σ к уже приведенному в § 11 анализу. Существенным отличием рассматриваемого случая от изученного выше будет наличие источников массы и импульса внутри σ .

Напишем, как и раньше, закон сохранения энергии для элемента потока в системе отсчета, движущейся вместе с ним, и отдельно для центра тяжести этого элемента.

В системе отсчета, движущейся вместе с элементом жидкости внутри области σ , можно написать следующее очевидное равенство:

$$dMc_s T + p dV - dQ^* + d\mathcal{E}'. \quad (18.1)$$

Здесь M — масса элемента, V — его объем, Q^* — количество подведенного тепла, $\mathcal{E}'$ — энергия, вносимая источником массы.

В отличие от обычных термодинамических зависимостей в равенстве (18.1) под знак дифференциала взята масса элемента (ибо она переменна) и учтена энергия, подводимая не только за счет источника тепла, но и вносимая источником массы.

Величины, стоящие под знаком дифференциала в левой части равенства (18.1), могут быть найдены следующим образом.

Пусть элемент жидкости переходит за малое время Δt из положения AA в положение BB (рис. 25). Тогда изменение внутренней энергии эле-

мента $dMc_v T$ может быть выражено формулой

$$dMc_v T = F \Delta t (qv dc T + c_v T dqv). \quad (18.2)$$

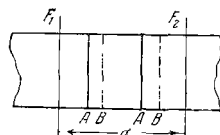


Рис. 25. Смещение элемента течения внутри зоны σ .

Изменение объема будет равно

$$dV = F \Delta t dv.$$

Подставив эти выражения в равенство (18.1), сразу получим следующее соотношение:

$$dqvc_v T + p dv = dQ + d\varepsilon', \quad (18.3)$$

где Q и ε' — интенсивности источников тепловой энергии и энергии, вносимой массой

$$dQ = \frac{dQ^*}{F \Delta t}; \quad d\varepsilon' = \frac{d\varepsilon'}{F \Delta t}.$$

Физический смысл этих двух величин — количество энергии, вносимой на единицу площади сечения в единицу времени.

Рассмотрим теперь перемещение центра тяжести выделенного элемента жидкости. На основании уравнения импульса напишем

$$dMv = -F \Delta t dp + dI, \quad (18.4)$$

где I — импульс, подведенный к элементу жидкости соответствующим источником (в том числе и источником массы).

Воспользовавшись тем же приемами, что и при выводе уравнения (18.3), можно написать:

$$qv dv + v dqv = -dp + d\mathcal{U},$$

где

$$d\mathcal{U} = \frac{dH}{F\Delta t}.$$

Умножая левую и правую части этого равенства на v , после некоторых простых преобразований находим:

$$dqv \frac{v^2}{2} + v dp = v d\mathcal{U} - \frac{v^2}{2} dqv.$$

Стоящие в правой части члены имеют следующий смысл: первый член дает суммарную интенсивность источника энергии, связанного с непосредственным подводом импульса и подводом импульса массой, а второй указывает, какая часть этой энергии пошла на сообщение необходимой кинетической энергии массе, введенной в рассматриваемый элемент жидкости, для того, чтобы введенная масса двигалась со скоростью элемента. Очевидно, что разность этих двух величин дает эффективную интенсивность источника энергии, связанного с непосредственным подводом импульса. Обозначая эту разность $d\varepsilon''$, придадим искомому соотношению окончательный вид:

$$dqv \frac{v^2}{2} + v dp = d\varepsilon''. \quad (18.5)$$

Интегрирование уравнений (18.3) и (18.5) даст

$$\left. \begin{aligned} (qvc_v T)_2 - (qvc_v T)_1 + \int_{\sigma} p dv &= Q + \varepsilon', \\ \left(qv \frac{v^2}{2} \right)_2 - \left(qv \frac{v^2}{2} \right)_1 + \int_{\sigma} v dp &= \varepsilon''. \end{aligned} \right\} \quad (18.6)$$

Сравнивая полученные результаты с формулами (11.12) и (11.13), сразу убеждаемся в их близком сходстве. Повторяя дословно все рассуждения, приведенные в § 11, нетрудно убедиться в справедливости вывода о существовании двух независимых (теплого и механического) источников энергии, поддерживающих акустические колебания. Справедливыми оказываются и все последующие

рассмотрения элементарных процессов в зоне теплоподвода и т. д.

При получении формул вида (11.17), (11.18) и (11.19) из равенств (18.6) следует помнить, что формально введенные источники массы и импульса являются фиктивными. Эти фиктивные источники, как уже указывалось выше, при установившихся колебаниях в среднем (за цикл) имеют расход, равный нулю, и, естественно, не могут подводить энергии извне. Аналитически это выражается условиями:

$$\int_0^T \dot{m}' dt = 0, \quad \int_0^T \dot{m}'' dt = 0.$$

§ 19. Возбуждение колебательной системы в общем случае

В предыдущей главе было рассмотрено возбуждение колебательной системы при реализации элементарных процессов в зоне теплоподвода.

Рассмотрим в настоящем параграфе метод построения границ устойчивости наподобие тех, которые строились в § 12, но теперь для процесса в зоне теплоподвода, который не является элементарным. Однако предварительно получим некоторые следствия из найденных в настоящей главе выражений.

Прежде всего следует убедиться в том, что введенные ранее элементарные процессы в зоне теплоподвода могут реализоваться фактически, и поэтому проведенные выше рассмотрения нельзя считать отвлеченными теоретическими схемами.

Как следует из формул (17.3) и (17.4), условия $\delta E = 0$ или $\delta X = 0$ действительно могут быть реализованы. Пусть, например, заданы возмущения переменных перед зоной теплоподвода $\bar{v}_1$, $\bar{p}_1$ и $\bar{s}_1$. Эти три величины определяют δX_0 , и для того, чтобы δX обращалось в нуль, необходимо выполнение условия $\delta X' = -\delta X_0$. Таким образом, в зоне теплоподвода будет реализован первый элементарный процесс, если величина $\delta X'$ будет иметь вполне определенный модуль и аргумент. Это можно осуществить

самым различным образом, поскольку для получения нужного значения $\delta X'$ можно воспользоваться четырьмя независимыми параметрами: J_1 , $\bar{J}_2$, $\bar{J}_3$ и $\bar{Q}$. Если рассматривать для определенности простейший случай возбуждения акустических колебаний в трубе Рийке, то вместо четырех свободных параметров сохранится лишь $\bar{Q}^*$ — безразмерное возмущение внешнего теплоподвода. Равенства (16.1) и (17.4) показывают, что первый элементарный процесс в трубе Рийке будет реализован при

$$\bar{Q}^* = \frac{\delta X_0}{2M_1^2 b_{23}},$$

вполне определенной колеблющейся составляющей теплоподвода. Точно такое же рассуждение можно провести и для обоснования реальности второго элементарного процесса ($\delta E = 0$).

Вторым обстоятельством, которое нужно отметить, является то, что в движущейся среде фазы δE и колеблющейся составляющей теплоподвода $\dot{Q}$ не совпадают. Действительно, рассматривая, например, простейший случай колебаний в трубе Рийке, можно на основании формул (16.1), (17.3) и (17.4) написать

$$\delta E = \delta E_0 + 2b_{13} M_1^2 \bar{Q}^*.$$

Поскольку фаза δE_0 , вообще говоря, не совпадает с фазой $\bar{Q}^*$, высказанное утверждение доказано. Это обстоятельство позволило рассматривать условия возбуждения, полученные в § 12 для первого элементарного процесса, в качестве обобщения критерия Рэлея (последний оказывается справедливым лишь при совпадении фаз δE и $\bar{Q}^*$).

Рассмотрим теперь некоторые свойства, которыми могут обладать процессы в зоне теплоподвода и которые позволяют во многих случаях получать весьма наглядные диаграммы областей устойчивости.

Как уже указывалось выше, граница устойчивости определяется равенством (11.9) $A_z = R$. В общем случае из (13.2), вводя безразмерный поток акустической энергии по формулам

$$\bar{A} = \frac{A}{\kappa a_1 p_1}; \quad \bar{R} = \frac{R}{\kappa a_1 p_1}, \quad (19.1)$$

получим

$$\bar{A}_z = \frac{1}{2} (\bar{p}_1 \delta E + \bar{v}_1 \delta X + \delta E \delta X). \quad (19.2)$$

Условие существования границы устойчивости запишется в виде

$$\bar{A}_z = \bar{R}. \quad (19.3)$$

Равенства (19.2) и (19.3) показывают, что при заданных $\bar{p}_1$ и $\bar{v}_1$ существует сложная совокупность значений δE и δX , удовлетворяющих условию, определяющему границу устойчивости. Этой совокупности трудно придать наглядность, так как связь между искомой величиной и двумя векторами сводится, как известно, к связи этой величины с четырьмя скалярными переменными. Кроме того, не следует забывать, что и величины $\bar{p}_1$ и $\bar{v}_1$ могут изменяться (при перемещении поверхности разрыва Σ вдоль стоячей волны, возникшей в системе).

Анализ условий возбуждения обычно сильно упрощается в тех случаях, когда величины δE и δX оказываются функциями одной и той же комплексной переменной, если не считать зависимости их от $\bar{v}_1$, $\bar{p}_1$ и $\bar{s}_1$. Приведем несколько примеров таких процессов в зоне теплоподвода.

В качестве первого примера рассмотрим все те случаи, когда процесс в зоне теплоподвода может быть представлен как процесс подвода тепла в некоторой области, неподвижной относительно стенок трубы и имеющей пренебрежимо малую протяженность в направлении оси трубы (труба Рийке и т. п.). Малая протяженность области теплоподвода при условии ее неподвижности приводит к тому, что $\bar{J}_1 = \bar{J}_2 = \bar{J}_3 = 0$ и, следовательно, как показывают формулы (16.1) и (17.4),

$$\left. \begin{aligned} \delta E' &= 2b_{13}M_1^2\bar{Q}^*, \\ \delta X' &= 2b_{23}M_1^2\bar{Q}^*. \end{aligned} \right\} \quad (19.4)$$

В случае горения вместо $2M_1^2\bar{Q}^*$ может стоять величина Q .

Вторым примером будет случай постоянного теплоподвода на подвижной поверхности пламени. Как видно из

формул (16.2), (16.3) и (16.4), $\bar{J}_1$, $\bar{J}_2$ и J_3 будут функцией величины $-\frac{1}{F} \frac{\partial}{\partial t} V_r(t)$, которую можно представить как сумму $\bar{v}_1$ и $\bar{U}_1$ или $\bar{U}_{1\text{эфф}}$. Таким образом, величинами $\delta E'$ и $\delta X'$ окажутся функциями v_1 и возмущения эффективной скорости распространения фронта пламени относительно холодной смеси:

$$\left. \begin{aligned} \delta E' &= a_E \bar{v}_1 + b_E \bar{U}_{1\text{эфф}}, \\ \delta X' &= a_x \bar{v}_1 + b_x \bar{U}_{1\text{эфф}}, \end{aligned} \right\} \quad (19.5)$$

где a_E , a_x , b_E , b_x — некоторые численные коэффициенты.

Величина v_1 , вошедшая в формулы (19.5), не мешает считать $\delta E'$ и $\delta X'$ функциями одной переменной $\bar{U}_{1\text{эфф}}$. Дело в том, что $\bar{v}_1$ (как и p_1) обычно задается, кроме того, v_1 входит в формулу (19.2) непосредственно и содержится в членах δX_0 и δE_0 . Таким образом, свободным параметром, который можно варьировать произвольно и влияние которого на устойчивость имеет смысл изучать, является комплексная переменная $\bar{U}_{1\text{эфф}}$.

В качестве третьего примера рассмотрим процесс, в котором как $\bar{J}_1$, $\bar{J}_2$ и $\bar{J}_3$, так и $\bar{\eta}_{\text{сг}}$ и q_1 отличны от нуля. Пусть, например, в зону горения поступает смесь с переменным коэффициентом избытка воздуха α . Такая смесь будет характеризоваться $\bar{q}_1$, отличным от нуля. Если предположить, что полнота сгорания $\eta_{\text{сг}}$ однозначно определяется α , $\bar{v}_1$ и $\bar{p}_1$, и положение фронта пламени, а следовательно, и $\bar{J}_1$, $\bar{J}_2$ и $\bar{J}_3$ также являются функциями α , $\bar{v}_1$ и $\bar{p}_1$, то величины δE и δX будут зависеть только от α , в том же смысле, в каком выше говорилось о зависимости δE и δX только от $\bar{U}_{1\text{эфф}}$.

Количество подобных примеров можно было бы увеличить. Для всех приведенных случаев анализ условий возбуждения упрощается потому, что зависимость $\bar{J}_2$ от одного комплексного параметра может быть хорошо представлена на плоскости. Это позволяет осуществить построение наглядных диаграмм границ устойчивости. Чтобы не быть связанным с каким-либо одним конкретным

примером, будем рассматривать задачу в более общей постановке — будем считать, что величины δE и δX зависят от некоторого комплексного параметра $\bar{Y}$ (безразмерного возмущения какой то существенной величины Y), а также от $\bar{p}_1$ и $\bar{v}_1$. Формулы (17.4) показывают, что можно ожидать зависимости δE и δX и от $\bar{s}_1$, но обычно течение в холодной части трубы, до пересечения потоком воздуха зоны теплоподвода изохронично и поэтому $\bar{s}_1 = 0$.

Следовательно, в рассматриваемом случае первые два уравнения (17.5) можно записать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_2 &= a_{11}\bar{v}_1 + a_{12}\bar{p}_1 + a_{13}\bar{Y}, \\ \bar{p}_2 &= a_{21}\bar{v}_1 + a_{22}\bar{p}_1 + a_{23}\bar{Y}, \end{aligned} \right\} \quad (19.6)$$

где a_{ik} — некоторые численные коэффициенты [отличные от обозначенных таким же образом коэффициентов уравнений (17.5)].

Вычисление $\bar{A}_\Sigma$ по формуле (19.2) в рассматриваемом случае не имеет смысла, так как соотношения (19.6) не содержат δE и δX , выраженных непосредственно через $\bar{Y}$. Воспользуемся поэтому формулой (13.4), которая при переходе к безразмерным переменным примет следующий вид:

$$A_\Sigma = \frac{1}{2} (nm\bar{p}_2\bar{v}_2 - \bar{p}_1\bar{v}_1). \quad (19.7)$$

Здесь, как и ранее, $n = \frac{a_2}{a_1}$, $m = \frac{\kappa_2 p_2}{\kappa_1 p_1}$.

Рассматривая входящие в равенства (19.6) переменные $\bar{v}$, $\bar{p}$ и $\bar{Y}$ как векторные величины, возьмем скалярное произведение этих равенств друг на друга.

$$\begin{aligned} \bar{p}_2\bar{v}_2 &= a_{11}a_{21}\bar{v}_1^2 + a_{12}a_{22}\bar{p}_1^2 + a_{13}a_{23}\bar{Y}^2 + \\ &+ (a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})\bar{p}_1\bar{v}_1 + \\ &+ (a_{11}a_{23} + a_{13}a_{21})\bar{v}_1\bar{Y} + (a_{12}a_{23} + a_{13}a_{22})\bar{p}_1\bar{Y}. \end{aligned}$$

Используя (19.7) и последнее равенство, получим из (19.3) следующее соотношение, эквивалентное условию устойчивости:

$$A\bar{Y}^2 + B\bar{p}_1\bar{Y} + C\bar{v}_1\bar{Y} + D\bar{p}_1^2 + E\bar{v}_1^2 + F\bar{p}_1\bar{v}_1 - R = 0, \quad (19.8)$$

где A, B, C, D, E и F — численные коэффициенты,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} n m a_{13} a_{23}, & D &= \frac{1}{2} n m a_{12} a_{22}, \\ B &= \frac{1}{2} n m (a_{12} a_{23} + a_{13} a_{22}), & E &= \frac{1}{2} n m a_{11} a_{21}, \\ C &= \frac{1}{2} n m (a_{11} a_{23} + a_{13} a_{21}), & F &= \frac{1}{2} [n m (a_{11} a_{22} + a_{12} a_{21}) - 1]. \end{aligned}$$

Воспользуемся условием (19.8) для построения диаграммы границ устойчивости. Построение начнем с наиболее простого случая, характеризуемого отсутствием потерь акустической энергии.

Пусть слева и справа от зоны теплоподвода потери акустической энергии равны нулю (например, слева и справа от указанной зоны расположены узлы скорости или давления). Тогда, как это было показано в § 11 при обсуждении формулы (11.7), векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{v}$ должны быть ортогональны и поэтому $\mathbf{p}_1 \mathbf{v}_1 = \mathbf{p}_2 \mathbf{v}_2 = 0$. Поэтому вместо равенства (19.8) получим

$$A \bar{Y}^2 + B \bar{p}_1 \bar{Y} + C \bar{v}_1 Y + D \bar{p}_1^2 + E \bar{v}_1^2 = 0. \quad (19.9)$$

Границу устойчивости будем строить в прямоугольной системе координат (x, y) . Пусть векторы $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{v}_1$ и $\bar{\mathbf{Y}}$ приложены к началу координат и вращаются вокруг него с частотой ω (см. § 2). Выберем такой момент времени, когда вектор $\bar{\mathbf{p}}_1$ будет направлен по оси x , а ось y направим по вектору $\mathbf{v}_1$. Вектор $\bar{\mathbf{Y}}$ будет расположен некоторым произвольным образом относительно осей координат. Границей устойчивости в плоскости (x, y) будем называть геометрическое место концов векторов $\bar{\mathbf{Y}}$, удовлетворяющих (19.9). Введем обозначения для векторов $\bar{\mathbf{p}}_1$, $\bar{\mathbf{v}}_1$ и $\bar{\mathbf{Y}}$ через их проекции на оси x и y . Они будут выражаться следующим образом: $(\bar{p}_1, 0)$; $(0, \bar{v}_1)$; (Y_x, Y_y) . Запишем теперь сумму скалярных произведений (19.9) через проекции сомножителей:

$$A(Y_x^2 + Y_y^2) + B \bar{p}_1 Y_x + C \bar{v}_1 Y_y + D \bar{p}_1^2 + E \bar{v}_1^2 = 0. \quad (19.10)$$

Нетрудно видеть, что при заданных $\bar{p}_1$ и $\bar{v}_1$ уравнение (19.10) указывает на движение конца вектора $\bar{\mathbf{Y}}$ по

окружности, положение и радиус которой зависят от $\bar{p}_1$ и $\bar{v}_1$. Следовательно, множество векторов $\bar{Y}$, возбуждающих колебания, отделяется от всех остальных на плоскости (x, y) годографом, имеющим форму окружности. Поскольку размеры и положение этой окружности изменяются с изменением $\bar{p}_1$ и $\bar{v}_1$, различным положениям плоскости теплоподвода Σ по длине трубы — ближе

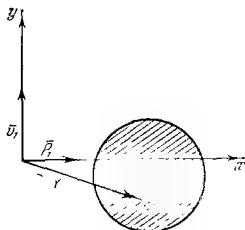


Рис. 26. Диаграмма устойчивости для заданных $\bar{p}_1$ и $\bar{v}_1$.

или дальше от узла давления, — или различным частотам колебаний, т. е. различным $\bar{p}_1$ и $\bar{v}_1$ могут соответствовать различные границы устойчивости. Таким образом, условия возбуждения системы могут изменяться при изменении положения Σ , или частоты колебания. На рис. 26 изображена граница устойчивости для некоторых заданных $\bar{p}_1$ и $\bar{v}_1$.

На основании проделанных выкладок можно утвер-

ждать только то, что при положении конца вектора $\bar{Y}$ на изображенной окружности колебания будут нейтральными. Вопрос о том, по какую сторону окружности лежит область устойчивости, а по какую область неустойчивости, требует дополнительного исследования. В большинстве практических случаев не возникает необходимости проводить такое исследование, поскольку ответ бывает ясен из физической сущности задачи.

Однако анализ этого вопроса не представляет больших трудностей и в тех случаях, когда физические соображения не дают сразу очевидного решения.

Можно провести, например, следующее качественное рассуждение. Пусть величина $\bar{Y}$ такова, что процесс нейтрален. Сохраним значение $\bar{p}_1$ и $\bar{v}_1$ и изменим несколько $\bar{Y}$ (таким образом, чтобы конец этого вектора сошел с гра-

ницы устойчивости). Тогда равенство (19.10) нарушится, причем, основываясь на рассуждениях, проведенных при выводе уравнения (19.8), можно будет написать

$$A(\bar{Y}_x^2 + \bar{Y}_y^2) + B\bar{p}_1\bar{Y}_x + C\bar{v}_1\bar{Y}_y + D\bar{p}_1^2 + E\bar{v}_1^2 = \bar{A}_\Sigma.$$

При отсутствии потерь в системе границе устойчивости соответствует $\bar{A}_\Sigma = 0$, $\bar{A}_\Sigma > 0$ дает неустойчивость, а $\bar{A}_\Sigma < 0$ — устойчивость процесса. В начале координат $\bar{Y}_x = \bar{Y}_y = 0$ и $\bar{A}_\Sigma = D\bar{p}_1^2 + E\bar{v}_1^2$. Следовательно, если

$$D\bar{p}_1^2 + E\bar{v}_1^2 < 0, \quad (19.11)$$

то процесс в окрестности начала координат устойчив, а значит неустойчив внутри окружности.

Условимся штриховать область неустойчивости. Тогда при выполнении неравенства (19.11) внутренняя часть окружности на рис. 26 будет заштрихована. Такая именно картина наблюдается, например, в тех случаях, когда акустические колебания возбуждаются теплоподводом, сконцентрированным в одной, неподвижной относительно стенок трубы плоскости (труба Рийке и т. п.).

Нестрогость приведенного здесь качественного рассуждения заключается в том, что при $\bar{A}_\Sigma \neq 0$ колебания перестают быть гармоническими, приведенные выше формулы для потоков акустической энергии становятся неправильными, а угол между векторами $\bar{p}_1$ и $\bar{v}_1$ начинает отличаться от $\frac{\pi}{2}$.

Если стремиться к более точному анализу, то это обычно проще всего сделать путем фактического вычисления декремента затухания колебаний для какой-либо точки диаграммы, например, начала координат. Соответствующие методы будут развиты в следующих главах.

Сравнивая полученный здесь и приведенный на рис. 26 результат с рассмотренными в предыдущей главе условиями возбуждения в двух элементарных процессах, легко отметить усложнение условий возбуждения. Это усложнение выражается в том, что, во-первых, фазовые соотношения между $\bar{Y}$ и $\bar{p}_1$ или $\bar{v}_1$ не могут быть сформулированы так просто, как для элементарных процессов;

во-вторых, помимо фазовых соотношений, приходится учитывать и амплитудные, т. е. величину $|\bar{Y}|$ и, в третьих, условия возбуждения зависят от положения плоскости разрыва Σ по длине трубы (от $\bar{p}_1$ и $\bar{v}_1$). Следует заметить, что такое усложнение условий возбуждения не связано с переходом к параметру $\bar{Y}$ вместо δX и δE . Рассмотрение задачи о границах устойчивости при заданных $\bar{p}_1$, $\bar{v}_1$, $\delta X \neq 0$ и переменном δE (или при заданном $\delta E \neq 0$ и переменном δX) показывает, что и при таком подходе фазовые соотношения усложняются, начинает играть существенную роль абсолютная величина переменного параметра (δE или δX) и условия возбуждения становятся функцией положения плоскости Σ по длине трубы (функцией $\bar{p}_1$ и $\bar{v}_1$). Таким образом, в отличие от элементарных процессов (при δE или δX , равном нулю) все остальные процессы по своей физической сущности дают сложные условия возбуждения. Причина кроется в том, что в этих случаях происходит заимствование энергии из двух источников одновременно, что приводит к сложной картине их взаимодействия. Несколько подробнее этот вопрос будет освещен ниже.

Граница устойчивости, изображенная на рис. 26, получена в предположении, что значения $\bar{p}_1$ и $\bar{v}_1$ заданы. Однако здесь уже неоднократно подчеркивалось, что в зависимости от положения зоны теплоподвода по длине трубы (точнее, в зависимости от ее положения относительно стоячей волны возмущения) значения $\bar{p}_1$ и $\bar{v}_1$ могут изменяться, а следовательно, будет смещаться и изменять свои размеры окружность на рис. 26. Поэтому естественно поставить вопрос о нахождении семейства таких окружностей, соответствующих всем мыслимым для данной трубы значениям $\bar{p}_1$ и $\bar{v}_1$.

Здесь речь идет, конечно, не об абсолютных значениях $\bar{p}_1$ и $\bar{v}_1$, а о соотношении между ними. Как уже говорилось, применяемый метод дает все величины с точностью до масштаба.

Решение задачи о колебаниях в переменных $\bar{u}$, $\bar{w}$ показывает, что при нейтральных колебаниях обе эти величины остаются постоянными по абсолютному значе-

нию для любых сечений трубы, если между этими сечениями нет поверхностей разрыва. Такому условию удовлетворяет, в частности, отрезок трубы, по которому течет холодный газ. Поэтому можно написать, что на этом участке

$$|\bar{u}_1| = \text{const}, \quad |\bar{w}_1| = \text{const}$$

или

$$\bar{u}_1^2 = \text{const}, \quad \bar{w}_1^2 = \text{const}.$$

Соотношения (4.9), связывающие переменные $\bar{u}$, $\bar{w}$ и p , $\bar{v}$, позволяют на этом основании написать:

$$\bar{v}_1^2 + 2v_1 p_1 + \bar{p}_1^2 = \text{const},$$

$$\bar{v}_1^2 - 2\bar{v}_1 \bar{p}_1 + \bar{p}_1^2 = \text{const}.$$

Отсюда получаем связь между $\bar{p}$ и $\bar{v}$ в случае нейтральных колебаний

$$\bar{u}_1^2 + \bar{p}_1^2 = \text{const}.$$

Написав скалярные квадраты через проекции векторов, найдем

$$\bar{v}_1^2 + \bar{p}_1^2 = \text{const}. \quad (19.12)$$

Уравнение (19.10) показывает, что положение центра окружности, изображенной на рис. 26, определяется координатами:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= -\frac{1}{2} \frac{B}{A} \bar{p}_1, \\ y_0 &= -\frac{1}{2} \frac{C}{A} \bar{v}_1. \end{aligned} \right\} \quad (19.13)$$

Сравнивая равенства (19.12) и (19.13), можно видеть, что центры окружностей (x_0, y_0) будут перемещаться по дуге эллипса. Надо лишь добавить, что центры (x_0, y_0) будут располагаться не на всей дуге эллипса, а лишь на одной из четвертей его дуги. Действительно, в выбранной системе координат $\bar{p}_1$ и $\bar{v}_1$ всегда положительны. Положение искомой четверти дуги эллипса зависит от знаков численных коэффициентов $\frac{B}{A}$ и $\frac{C}{A}$. Расчеты показывают, что, например, для случая возбуждения колебаний переменным теплоподводом ($\bar{Y} = \bar{Q}$) этой четвертью всегда будет четвертая четверть.

Проведенный анализ позволяет утверждать, что семейство всех границ устойчивости составлено множеством окружностей, центры которых перемещаются по четверти дуги эллипса. Огибающая этого семейства ограничит

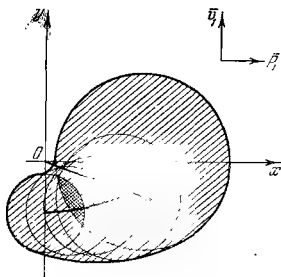


Рис. 27. Диаграмма устойчивости для произвольных $\bar{p}_1$ и $\bar{v}_1$.

область, изображенную на рис. 27 (эта область построена для определенности применительно к случаю $\bar{Y} = \bar{Q}$). При попадании конца вектора $\bar{Y}$ в заштрихованную область возбуждение системы становится возможным.

Реализация этой возможности связана с тем, находится ли конец вектора $\bar{Y}$ внутри той из окружностей семейства, которая соответствует фактическому положению

поверхности разрыва Σ (фактическим $\bar{p}_1$ и $\bar{v}_1$). Внутри заштрихованной области может существовать подобласть, принадлежащая всем окружностям семейства. На рис. 27 она заштрихована в клетку. При попадании конца вектора $\bar{Y}$ в эту подобласть возбуждение становится возможным вне зависимости от положения поверхности Σ вдоль оси трубы. В этом смысле можно говорить о значениях вектора $\bar{Y}$, при которых возбуждение особенно вероятно. Положение конца вектора $\bar{Y}$ вне заштрихованных областей всегда соответствует устойчивости системы.

Чтобы правильно понимать смысл построенных диаграмм, укажем на одно важное обстоятельство. Каждая окружность — граница устойчивости — строилась для заданных, неизменных значений $\bar{p}_1$ и $\bar{v}_1$. Но это не означает, что все режимы, соответствующие точкам такой окружности, могут быть фактически реализованы в одной и той же трубе. Действительно, пусть режим колебаний, соответствующий одной из точек некоторой границы устойчи-

ности, реализован в трубе с областью теплоподвода, расположенной на расстоянии L_1 от входного конца и L_2 от выходного. Примем, что на концах трубы расположены узлы давления. Перейдем теперь мысленно в соседнюю точку той же окружности границы устойчивости. Тогда p_1 и $\bar{v}_1$ не изменятся, а частота ω не сможет измениться, так как иначе нарушится краевое условие на входе. (Это видно, например, из формул (4.13) и (4.14).) Таким образом, при переходе в соседнюю точку границы устойчивости процесс колебаний во входном участке не меняется. Перемещение по окружности границы устойчивости означает в этих условиях только изменение вектора Y .

Как видно из уравнений (19.6), изменение $\bar{Y}$ при неизменных p_1 и $\bar{v}_1$ неизбежно приводит к изменению $\bar{p}_2$ и $\bar{v}_2$. Поскольку размерная частота колебаний одинакова для обеих частей трубы, частота колебаний в горячей части трубы не может измениться. Но тогда функции ϕ_1 и ϕ_2 для горячей части тоже останутся неизменными и краевое условие на выходном конце нарушится в силу изменения величин $\bar{p}_2$ и $\bar{v}_2$ в плоскости теплоподвода [величины A_v и A_p в равенствах (4.13)]. Чтобы сохранить краевое условие на выходе, необходимо изменять длину L_2 . Таким образом, двигаясь по окружности границы устойчивости, приходится мысленно изменять какую-либо характеристику трубы, например длину L_2 .

Этот странный, на первый взгляд, результат вполне естествен, так как при построении границ устойчивости были использованы только энергетические соображения и краевые условия никак не оговаривались.

Если краевые условия заданы, то при изменении $\bar{Y}$ будут меняться не только $\bar{p}_2$ и $\bar{v}_2$, но и p_1 , $\bar{v}_1$ и частота колебаний, а граница устойчивости для подобной трубы фиксированных размеров будет состояться точками, принадлежащими разным окружностям уже найденного в настоящем параграфе семейства. При этом область неустойчивости окажется внутри заштрихованной части диаграммы на рис. 27.

В заключение следует обратить внимание на вид границ устойчивости рассматриваемого типа в тех случаях, когда

плоскость Σ находится точно в узлах скорости или давления. Следует, правда, оговориться, что термин «точно» имеет смысл лишь для элементарных процессов, так как в общем случае возмущение давления или скорости при

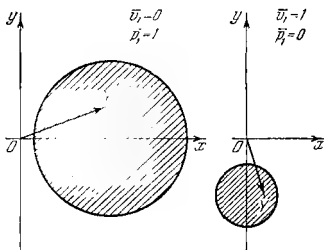


Рис. 28. Диаграммы устойчивости при положении плоскости теплоподвода Σ в узле скорости и узле давления.

пересечении области теплоподвода σ не остается неизменным. Если условиться считать положением плоскости Σ в узле совпадение ее с сечением, где $\bar{p}_1 = 0$ для $\bar{v}_1 = 0$, то соответствующие границы устойчивости займут, согласно формул (19.13), положения, указанные на рис. 28. Слева дана диаграмма для положения Σ в узле скорости, а справа — в узле давления.

§ 20. Диаграммы границ устойчивости для типичных случаев

Настоящий параграф посвящен рассмотрению диаграмм устойчивости для некоторых типичных случаев. Основной задачей будет анализ изменения конфигурации границ устойчивости в зависимости от особенностей процесса теплоподвода в зоне σ . Однако прежде чем переходить к такому анализу, сделаем одно замечание.

Приведенная на рис. 27 диаграмма является характерной для случая возбуждения колебаний теплоподводом

($Y = \bar{Q}$). Следует отметить интересную особенность такого случая — начало координат не попадает в заштрихованную область. Это означает, что для возбуждения системы надо иметь конечное значение вектора Q ; при $\bar{Q}$, по абсолютному значению меньшем некоторой величины, система вообще никогда не возбудится. Следует подчеркнуть, что конечность Q не означает необходимости конечного возмущения теплоподвода в начальный момент времени. Дело в том, что при построении диаграмм типа приведенных на рис. 26 и 27, значение суммы $v_1^2 + p_1^2$ условно принимается равным единице, подобно тому, как это делалось при построении диаграмм устойчивости для элементарных процессов. Следовательно, в общем случае, говоря о величине Y , следует понимать, что речь идет о соотношении между величиной $\bar{Y}$ и величиной, принятой за единицу. В начальный момент, когда истинная амплитуда возмущения давления (условная единица) мала, тот же порядок малости имеет, очевидно, и $\bar{Q}$.

Рассмотрим теперь несколько частных случаев диаграмм устойчивости. Построенная на рис. 27 диаграмма соответствует возбуждению колебаний при $\bar{J}_1 = \bar{J}_2 - J_3 = 0$, т. е. за счет одного лишь возмущения теплоподвода Q . Она построена для самого общего случая. Предположим, что в установившемся движении подогрев газа при пересечении им поверхности Σ пренебрежимо мал, так что в уравнениях (15.7) можно положить $M_1 = M_2 = M$ и $a_1 = a_2$; это соответствует в первом приближении возбуждению звука в трубе Рийке. Тогда систему (15.7) можно записать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_2 + M\bar{p}_2 - M\bar{s}_2 &= v_1 + M\bar{p}_1 - M\bar{s}_1, \\ 2Mv_2 + (1 + M^2)\bar{p}_2 - M^2\bar{s}_2 &= \\ &= 2M\bar{v}_1 + (1 + M^2)\bar{p}_1 - M^2\bar{s}_1 + M^2\bar{p}_x^*, \\ \left(3M^2 + \frac{2}{\kappa - 1}\right)\bar{v}_2 + M\left(M^2 + 2\frac{\kappa}{\kappa - 1}\right)\bar{p}_2 - M^3\bar{s}_2 &= \\ &= \left(3M^2 + \frac{2}{\kappa - 1}\right)v_1 + \\ &+ M\left(M^2 + 2\frac{\kappa}{\kappa - 1}\right)\bar{p}_1 - M^3\bar{s}_1 + Q, \end{aligned} \right\} \quad (20.1)$$

где для трубы Рийке

$$\dot{Q} \approx 2Mz\bar{Q}^*. \quad (20.2)$$

Полная симметрия левых и правых частей уравнений (20.4) (с точностью до слагаемого $\bar{Q}$ и при $\bar{P}_x^* = 0$) делает исключение переменных чрезвычайно простым. Не сложные алгебраические выкладки позволяют получить:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_2 &= \bar{v}_1 + \frac{z-1}{2(1-M^2)} \bar{Q}, \\ \bar{p}_2 &= \bar{p}_1 - M \frac{z-1}{2(1-M^2)} \bar{Q}. \end{aligned} \right\} \quad (20.3)$$

Сравнивая полученные равенства с равенствами (19.6), видим, что $a_{12} = a_{21} = 0$, а это приводит в уравнении (19.8) к $D = E = 0$. Но равенство нулю D и E указывает, что окружность, определяемая уравнением (19.10), всегда проходит через начало координат. Таким образом, при малом подогреве в области σ все окружности, являющиеся границами устойчивости, пересекаются в одной точке, и эта точка является началом координат. Соответствующее построение приведено на рис. 29, б, причем для полноты картины рядом (рис. 29, а) приведено такое же построение для случая конечного подогрева ($M_1 < M_2$), аналогичное диаграмме на рис. 27. Сравнение диаграмм а и б указывает, что при малом подогреве система становится менее устойчивой в том смысле, что возбуждение ее возможно сколь угодно малыми относительными возмущениями теплоподвода $\bar{Q}^*$.

Рассмотрим, наконец, третий случай из этой серии. Пусть $M_1 = M_2 = 0$, т. е. в основном движении газ неподвижен. Тогда уравнения (20.3) дают

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_2 &= \bar{v}_1 + \frac{z-1}{2} \bar{Q}, \\ \bar{p}_2 &= \bar{p}_1. \end{aligned} \right\} \quad (20.4)$$

Теперь в уравнении (19.8) в нуль обращается A , C , D и E , а уравнение окружности (19.10) вырождается в прямую $Y_x = 0$, т. е. границей устойчивости становится ось y вне зависимости от $\bar{p}_1$ и $\bar{v}_1$. Этот вид диаграммы границ устойчивости показан на рис. 29, в. Очевидно,

последний случай является случаем Рэлея, поскольку система возбуждается, если фазовый сдвиг между возмущенной составляющей теплоподвода Q и периодической составляющей давления $\bar{p}_1$ менее $\frac{\pi}{2}$. Этот результат можно было предвидеть, поскольку второе равенство (20.4) указывает на реализацию в рассматриваемом случае первого элементарного процесса.

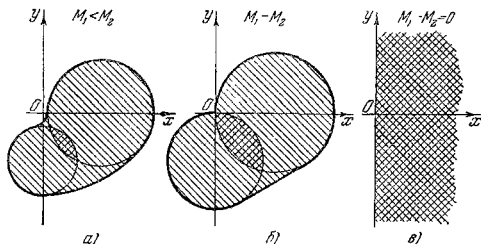


Рис. 29. Влияние скорости течения на конфигурацию границ устойчивости.

Если сравнить три типа диаграмм устойчивости, приведенных на рис. 29, то, рассматривая их в обратном порядке, можно видеть, как усложняются условия возбуждения сначала при возникновении течения, а затем при сильном стационарном подогреве. При этом область, заштрихованная в клетку, все более уменьшается, т. е. паряду со свойствами процесса теплоподвода все большую роль начинает играть и положение плоскости Σ относительно стоячей волны, образовавшейся в трубе.

Путем построения аналогичных диаграмм устойчивости для того типа теплоподвода, при котором фронт пламени свободно колеблется вместе с течением, можно показать, что при подвижном фронте теплоподвода колебательная система в известном смысле более склонна к возбуждению. Обратимся с этой целью к системе уравнений (16.12). Исключив из левых частей этой системы $\bar{s}_2$ и учтя,

что в холодном течении $\bar{s}_1 = 0$, приходим к системе из двух уравнений, содержащих $\bar{v}_2$, $\bar{p}_2$, $\bar{v}_1$, $\bar{p}_1$ и $\bar{U}_1$. Если исключить из них $\bar{v}_2$ и при этом учесть формулы (15.9) и (15.10), то нетрудно убедиться, что коэффициент при $\bar{v}_1$ в уравнении, определяющем $\bar{p}_2$, обращается в нуль. В обозначениях (19.6) это означает $a_{21} = 0$, что приводит в уравнениях (19.8) и (19.9) к $E = 0$. Но тогда при $\bar{p}_1 = 0$ граница устойчивости проходит через начало координат. Сравнивая этот

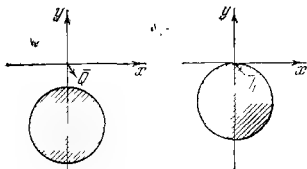


Рис. 30. Диаграммы устойчивости при возбуждении системы теплоподводом и подвижным пламенем ($p_1 = 0$).

случай с рассмотренным выше (рис. 30), можно видеть, что возбуждение акустических колебаний за счет подвижности фронта пламени ($\bar{U}_1$) более вероятно, чем за счет колеблющегося теплоподвода ($\bar{Q}$). Следует, правда, отметить, что это различие представляет скорее академический, чем практический интерес.

§ 21. Сравнение относительной значимости теплового и механического источников энергии при возбуждении колебаний

В заключение настоящей главы вернемся еще раз к вопросу об источниках энергии, необходимой для возбуждения акустических колебаний. В предыдущей главе было показано, что при известных предположениях о характере теплоподвода можно указать на два принципиально различных источника энергии акустических колебаний, а в § 18 этот вывод был распространен и на более общий

случай произвольного процесса горения смеси, поступающей в зону теплоподвода.

Полученные в настоящей главе формулы, характеризующие процессы, идущие внутри зоны горения σ , позволяют поставить вопрос о численной оценке относительной значимости каждого из двух найденных источников энергии.

Однако прежде чем решить, питается ли колебательная система главным образом за счет кинетической энергии течения или за счет энергии, имеющей тепловую форму, необходимо сделать одно замечание. В предыдущей главе были получены формулы (13.7), которые при переходе к безразмерной записи потока акустической энергии (19.1) примут вид:

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 &= \frac{1}{2} \left(\bar{p}_1 \delta E + \frac{1}{2} \delta E \delta X \right), \\ \bar{A}_2 &= \frac{1}{2} \left(\bar{v}_1 \delta X + \frac{1}{2} \delta E \delta X \right). \end{aligned} \quad (21.1)$$

По этим формулам можно оценить составляющие полного потока акустической энергии, излучаемой областью σ , соответствующие двум независимым источникам энергии. При выводе этих формул использовалось то обстоятельство, что равным долям изменения δp внутри σ соответствовали равные доли изменения δv . Аналитически это условие выражалось формулами (13.3).

В общем случае, при произвольно сложном процессе горения внутри σ , рассуждения, приведшие к формулам (13.3), оказываются неверными. Это следует хотя бы из того, что формулы (13.3) получены в предположении одномерности течения внутри σ , в то время как в общем случае это течение может быть существенно не одномерным.

Тем не менее в настоящем параграфе будут использоваться приведенные здесь формулы для $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$. Дело в том, что эти формулы справедливы для всех тех случаев, когда изменение δp и δv вдоль области σ происходит одновременно и равным долям изменения δp соответствуют равные доли изменения δv . Для одномерного течения в области σ это легко доказывается. В общем же случае это является наиболее естественным предположением, так как трудно представить себе реальный процесс

горения, который характеризовался бы, например, тем, что в первой части области σ имеет место только возмущение давления, а во второй — только возмущение скорости, или наоборот. Качественные соображения такого рода позволяют использовать полученные раньше формулы с выражениями A_1 и $\bar{A}_2$ и для анализа общего случая.

Поскольку в настоящем параграфе ставится только ограниченная задача оценки соотношения между A_1 и $\bar{A}_2$, здесь будет рассмотрен лишь ряд простейших случаев.

При $K = 0$ (отсутствие потерь на концах трубы) формула (11.9) дает следующее равенство, справедливое для колебательной системы, находящейся на границе устойчивости:

$$\bar{A}_1 + A_2 = 0, \quad (21.2)$$

откуда сразу следует, что $|\bar{A}_1| = |A_2|$. Таким образом, на границе устойчивости абсолютные величины обоих потоков акустической энергии, из которых один обязан своим существованием кинетической энергии течения, а другой — энергии, имеющей тепловую форму, равны между собой. С этой точки зрения оба источника энергии автоколебаний совершенно равноценны.

Согласно равенству (21.2) потоки $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$ имеют разные знаки и на границе устойчивости взаимно компенсируются. При этом один из них стремится возбудить систему, а другой гасит колебания. Дальнейшее развитие процесса зависит от того, сохранится ли такое равновесие или одержит верх один из «борющихся» между собой потоков $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$. Следует при этом иметь в виду, что в зависимости от конкретных условий как возбуждение, так и гашение колебаний может быть связано с заимствованием энергии из любого из двух наличных источников энергии. С этой точки зрения $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$ тоже совершенно равноправны.

Условие $\bar{A}_1 = -\bar{A}_2$, выполняющееся на границе устойчивости при отсутствии потерь во внешнюю среду, интересно в том отношении, что оно дает наглядное представление о роли двух энергетических резервуаров, которыми располагает колебательная система. Каждый из этих резервуаров может служить источником акустической энергии или, наоборот, поглотителем ее. Если, например, $\bar{A}_1 > 0$ и, сле-

довательно, $\bar{A}_2 < 0$, то при колебаниях в зоне горения получается механическая энергия за счет тепловых членов в потоке энергии, однако эта механическая энергия не расходуется на усиление акустических колебаний, а целиком идет на увеличение среднего потока кинетической энергии течения. Если бы система обладала каким-либо одним энергетическим резервуаром, то заимствованные из него энергии могли бы идти только на возбуждение акустических колебаний или на компенсацию потерь во внешнюю среду. Наличие второго энергетического резервуара как бы открывает возможность демпфирования процесса колебаний даже при отсутствии каких-либо внешних потерь.

Чтобы дать количественную оценку энергетических процессов, свойственных рассматриваемому явлению в процессе установившихся автоколебаний, обратимся к частному случаю (рис. 31). Рассмотрим закрытую с левого конца трубу. В этом случае поток суммарной акустической энергии влево будет равен нулю, так как излучение акустической энергии в окружающее пространство через закрытый конец невозможно. Но тогда в левой части трубы сдвиг по фазе между p_1 и v_1 будет равен $\frac{\pi}{2}$ и будет справедливо соотношение (19.12). Пусть потери акустической энергии будут всегда равными суммарной акустической энергии $A_1 + \bar{A}_2$, движущейся к открытому концу трубы. В этих условиях колебания будут установившимися характер и пользоваться формулами (21.4) можно.

Чтобы получить простую картину процесса, рассмотрим тот случай, когда возбуждение происходит за счет колебаний теплоподвода, а подогрев в плоскости Σ слаб ($M_1 = M_2 = M$, $n=1$ и $m=1$). В этих предположениях из формул (20.3) и (17.4) можно найти

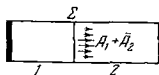


Рис. 31. Схема течения акустической энергии в трубе с одним закрытым концом.

$$\delta E = \bar{v}_2 - \bar{v}_1 = \frac{\kappa - 1}{2(1 - M^2)} \bar{Q},$$

$$\delta X = \bar{p}_2 - \bar{p}_1 = -M \frac{\kappa - 1}{2(1 - M^2)} \bar{Q},$$

а по формулам (21.1)

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_1 - \frac{1}{2} \left(\alpha Q \bar{p}_1 - \frac{1}{2} M \alpha^2 \bar{Q}^2 \right), \\ \bar{A}_2 - \frac{1}{2} \left(-M \alpha \bar{Q} \bar{v}_1 - \frac{1}{2} M \alpha^2 \bar{Q}^2 \right), \end{aligned} \right\} \quad (21.3)$$

где

$$\alpha = \frac{\kappa - 1}{2(1 - M^2)}.$$

Здесь возмущение теплоподвода $\bar{Q}$ записано в векторной форме. Из формул (21.3) видно, что для рассматриваемого типа колебательного процесса вторые слагаемые в $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$ всегда дают отрицательные составляющие, т. е. всегда гасят колебания. Следовательно, возбуждение системы можно производить только за счет первых слагаемых, причем в $\bar{A}_1$ $\bar{p}_1$ и $\bar{Q}$ должны для этого составлять угол, не превышающий $\frac{\pi}{2}$, а в $\bar{A}_2$ $\bar{v}_1$ и $\bar{Q}$ должны составлять угол больше $\frac{\pi}{2}$. Поскольку $\bar{p}_1$ и $\bar{v}_1$ в левой части трубы, примыкающей к закрытому концу, связаны условием (19.12)

$$r_1^2 + p_1^2 = \text{const},$$

то возможные наибольшие абсолютные значения $\bar{p}_1$ и $\bar{v}_1$ совпадают. Сравнение первых слагаемых выражений (21.3) показывает, что величина потока акустической энергии, идущей на возбуждение системы за счет кинетической энергии течения, возрастает прямо пропорционально числу M . При $M \rightarrow 1$ оба источника энергии (тепловой и механический) в этом смысле выравниваются.

Это не значит, что при малых (по конечных) M можно просто пренебрегать потоком энергии $\bar{A}_2$. Проще всего это можно видеть из следующего рассуждения. Пусть первое слагаемое $\bar{A}_2$ равно нулю (например, из-за фазового сдвига между $\bar{Q}$ и $\bar{v}_1$). Тогда возбуждение будет происходить за счет одного только первого слагаемого $\bar{A}_1$. Начнем увеличивать абсолютную величину $\bar{Q}$. При этом вторые слагаемые, в которые $\bar{Q}$ входит в квадрате, будут расти быстрее, чем первое, и при некотором $\bar{Q} = Q_{\text{max}}$

суммарный поток $\bar{A}_1 + \bar{A}_2$ обратится в нуль. Следовательно, возбуждающее действие первого слагаемого $\bar{A}_1$ будет целиком погашено вторыми слагаемыми $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$, причем в совершенно одинаковой мере.

Эти качественные выводы хорошо подтверждаются точными расчетами частных случаев тех или иных течений.

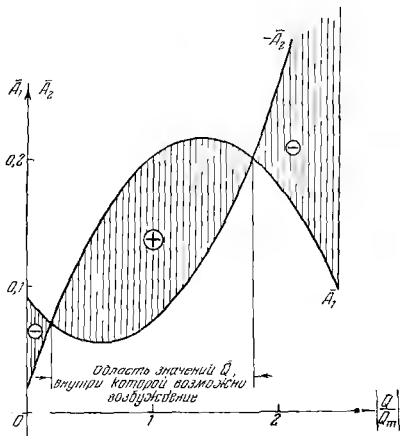


Рис. 32. Диаграмма изменения потока акустической энергии при изменении модуля $\bar{Q}$.

Для иллюстрации сказанного на рис. 32 приведена диаграмма, показывающая, как изменяется поток акустической энергии $\bar{A}_1 + \bar{A}_2$ при изменении модуля $\bar{Q}$ для частного случая $M_1 = 0,1$, $M_2 = 0,25$, $\bar{v}_1 = |\bar{p}_1|$. Как видно из приведенных чисел, речь идет о сравнительно медленном течении: условие $|\bar{v}_1| = |\bar{p}_1|$ взято для того, чтобы перед плоскостью теплоподвода иметь заметные

колебания как скорости, так и давления. При расчетах фаза $\bar{Q}$ выбиралась постоянной и такой, чтобы для заданных $\bar{p}_1$ и $\bar{v}_1$ при некотором модуле $\bar{Q} = \bar{Q}_{\max}$ обязательно достигался максимум $\bar{A}_1 + \bar{A}_2$ (вектор $\bar{Q}$ проходит через центр окружности, являющейся границей устойчивости при избранных $\bar{p}_1$ и $\bar{v}_1$). При построении диаграммы по оси ординат были отложены величины $\bar{A}_1$ и $-\bar{A}_2$, следовательно, расстояние между обеими кривыми по вертикали равно потоку $\bar{A}_1 + \bar{A}_2$, при этом в тех участках, где кривая $\bar{A}_1$ лежит выше $-\bar{A}_2$, суммарный поток положителен, а там, где $-\bar{A}_2$ проходит выше $\bar{A}_1$, — отрицателен.

Из диаграммы видно, что при $\bar{Q} = 0$ $\bar{A}_1 + \bar{A}_2 < 0$, т. е. при отсутствии колебания теплоподвода система устойчива. Выше это обстоятельство уже подчеркивалось при построении границ устойчивости (§ 20).

Приведенная на рис. 32 диаграмма полностью подтверждает полученные в настоящем параграфе результаты. Кроме того, из нее видно, что при таком сравнительно медленном течении колебательная система возбуждается за счет теплоподвода и потока внутренней энергии, а взаимодействие системы с потоком кинетической энергии ведет к сильному демпфированию колебаний.

Этот результат вообще характерен для медленных течений ($M \ll 1$), возбуждаемых теплоподводом. Такие течения возбуждаются за счет потока кинетической энергии лишь в исключительных случаях, при $\bar{p}_1$, близких к нулю, причем абсолютная величина $\bar{A}_1 + \bar{A}_2$ в этих случаях невелика.

Из сказанного не следует, однако, делать вывода, что поток $\bar{A}_2$ никогда не играет заметной роли как активный фактор возбуждения колебаний. Во-первых, с ростом M доля $\bar{A}_2$ в общем потоке акустической энергии пропорционально возрастает, во-вторых, картина может резко измениться, если процесс в зоне теплоподвода перестанет рассматриваться как функция одного комплексного параметра (в рассмотренном случае $\bar{Q}$). Если учесть, например, что в зоне теплоподвода могут одновременно происходить и колебания теплоподвода и колебания положения фронта

пламени, причем фазовый сдвиг между ними может быть произвольным, то нетрудно построить примеры систем, в которых главным источником энергии для возбуждения колебаний будет кинетическая энергия течения.

Кроме того, если вернуться к рис. 28, на котором даны границы устойчивости для случаев $\bar{v}_1 = 0$ и $p_1 = 0$, и учесть, что эти границы построены с соблюдением масштаба для рассматривавшегося в настоящем параграфе медленного течения, то нетрудно убедиться в том, что $\bar{A}_2$ может являться активным фактором возбуждения и в таких исключительно неблагоприятных для этого условиях, как $M_1 = 0,1$. Действительно, диаметр области неустойчивости в правой части рисунка (соответствующей $p_1 = 0$) лишь в 2,5 раза меньше диаметра области устойчивости, изображенной слева. В то же время из примера (21.3) видно, что при $p_1 = 0$ единственным возбуждающим систему потоком акустической энергии является $\bar{A}_2$, а при $\bar{v}_1 = 0$ эту роль исполняет $\bar{A}_1$. Следовательно, пренебрежение таким резервуаром энергии для поддержания автоколебаний, как кинетическая энергия течения, может не только исказить картину в тех случаях, когда возбуждение происходит за счет энергии, находящейся в тепловой форме, но и привести к неправильным выводам о возможности самовозбуждения системы в таких областях плоскости параметров, для которых возбуждение колебаний за счет энергии, находящейся в тепловой форме, вообще невозможно.

ГЛАВА V

ВОЗБУЖДЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ТЕПЛОПРОВОДОМ ПРИ ОТСУТСТВИИ ПОТЕРЬ

§ 22. Вводные замечания

Настоящая глава посвящена решению задачи об устойчивости течения подогреваемого газа в предположении, что акустическая энергия не излучается из концов трубы и, следовательно, не рассеивается в окружающем пространстве. При теоретическом анализе термического возбуждения звука такое предположение делается почти всегда, так как оно с известным приближением справедливо для случая возбуждения низких частот, представляющих основной интерес. Приближенная постановка задачи позволяет во многих случаях получить обзоры аналитические результаты, в основном справедливые и при более общих предположениях о рассеивании акустической энергии. Здесь не будет проводиться оценка допустимости сделанного предположения, поскольку в следующей главе рассматривается аналогичная задача с учетом потерь энергии на концах трубы.

В отличие от предшествующих глав, где по сути рассматривались элементы процесса возбуждения акустических колебаний теплопроводом (распространение продольных акустических возмущений по трубе, вопросы изменения этих возмущений при пересечении ими области теплопровода), здесь будет дано рассмотрение задачи в целом, с использованием полученных выше результатов. Однако прежде чем приступить к решению поставленной задачи, надо сделать одно замечание.

Во всех предыдущих рассуждениях, когда на основании энергетических соображений строились границы устой-

чивости, постоянно отсутствовало одно логическое звено. Все полученные выше результаты в конце концов сводились к утверждению, что если соотношения между фазами и амплитудами колеблющейся системы и процесса теплоподвода соответствуют определенным условиям, то система возбуждается. Точнее говоря, доказывалось, что если процессы в зоне теплоподвода имеют определенный колебательный характер, то в системе возбуждаются акустические колебания. Однако чтобы процесс замкнулся, надо еще показать, что акустические колебания среды в свою очередь приводят к колебательным процессам в зоне теплоподвода. Наличие этой обратной связи сделало бы возможным самовозбуждение колебаний в системе. Это можно показать путем такого качественного рассуждения: пусть в системе возникло слабое акустическое возмущение — оно привело к возмущению в зоне горения — в результате возникло новое акустическое возмущение, которое сложилось с предыдущим и усилило его, — усиленное акустическое возмущение привело к усиленному возмущению процесса в зоне горения — последнее вновь дало дополнительное усиливающее акустическое возмущение и т. д.

Следовательно, к уже доказанным выше положениям, что колеблющийся процесс горения способен вызвать акустические колебания, надо добавить доказательство того, что акустические колебания в свою очередь способны вызвать колеблющийся процесс горения. Существование этой обратной связи является чрезвычайно важным моментом в цепи рассуждений. Если обратиться к анализу физических процессов, лежащих в основе возникновения обратной связи, то окажется, что их довольно много, они сложны и достаточно разнообразны. Это делает необходимым посвятить вопросу о механизмах обратной связи специальную главу книги (гл. VII). Чтобы уже здесь придать наглядность этим рассуждениям, полезно дать какой-либо пример явления такого рода. Укажем с этой целью на почти очевидный факт: акустические колебания связаны с колебаниями скорости течения, а скорость течения влияет, как известно, на процесс горения (изменяет конфигурацию фронта пламени, изменяет скорость сгорания и т. п.). Таким образом, колебания скорости течения, вызванные

акустическими явлениями, порождают в свою очередь колебательное горение.

Ниже будет показано, что приведенный пример не исчерпывает всей массы возможных механизмов обратной связи, однако его упоминание здесь необходимо для того, чтобы показать, что механизмы обратной связи фактически существуют и что поэтому все предшествующие рассуждения не были беспредметными. Кроме того, указание на важность этого звена в процессе возбуждения колебаний заставит читателя более внимательно следить за предположениями, которые будут делаться в ходе дальнейшего изложения и которые всякий раз в явном или неявном виде будут содержать какое-то допущение, эквивалентное введению обратной связи.

Рассмотрение вопроса о возбуждении колебаний в трубе без потерь на концах целесообразно начать с уже известных простейших случаев, которые характеризуются реализацией элементарных процессов в зоне теплоподвода, с тем, чтобы применить к ним новый метод решения.

Примем, для определенности, что на концах трубы расположены узлы давления. Пусть плоскость теплоподвода Σ , эквивалентная области теплоподвода σ , располагается на расстояниях ξ_1 и ξ_2 от концов трубы. Расположим начало координат в сечении, совпадающем с Σ , так что левый конец трубы будет иметь координату $\xi_1 < 0$, а правый $\xi_2 > 0$.

Краевые условия запишем в следующем виде:

$$\bar{p}_1(\xi_1) = 0; \quad \bar{p}_2(\xi_2) = 0.$$

Тогда из решения (4.13) получим:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_1 \varphi_2(\xi_1) + \bar{p}_1 \varphi_1(\xi_1) &= 0, \\ \bar{v}_2 \varphi_2(\xi_2) + \bar{p}_2 \varphi_1(\xi_2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (22.1)$$

Здесь $\bar{v}_1$, $\bar{p}_1$, $\bar{v}_2$ и $\bar{p}_2$ — значения возмущений v и p в сечении $\xi = 0$, соответственно слева и справа от поверхности Σ .

Начнем рассмотрение задачи с того случая, когда процесс в зоне теплоподвода характеризуется условием $\delta E = \delta X = 0$.

Из канонической формы записи условий на Σ (17.1) следует, что при $\delta E = \delta X = 0$ $\bar{v}_1 = n\bar{v}_2$, $p_1 = m p_2$. Но тогда

система (22.1) становится линейной и однородной относительно p_2 и v_2 . Она будет иметь нетривиальные решения при условии

$$\begin{vmatrix} n\varphi_2(\xi_1) & m\varphi_1(\xi_1) \\ \varphi_2(\xi_2) & \varphi_1(\xi_2) \end{vmatrix} = 0.$$

Полученному характеристическому уравнению системы при $\varphi_2 \neq 0$ можно придать следующий вид:

$$n \frac{\varphi_1(\xi_2)}{\varphi_2(\xi_2)} - m \frac{\varphi_1(\xi_1)}{\varphi_2(\xi_1)} = 0. \quad (22.2)$$

Воспользовавшись формулами (4.14), получим, полагая $\beta = v + i\omega$:

$$\frac{\varphi_1(\xi)}{\varphi_2(\xi)} = \frac{1 - \exp \frac{4v\xi}{1-M^2} + 2i \exp \frac{2v\xi}{1-M^2} \sin \frac{2\omega\xi}{1-M^2}}{1 + \exp \frac{4v\xi}{1-M^2} - 2 \exp \frac{2v\xi}{1-M^2} \cos \frac{2\omega\xi}{1-M^2}}. \quad (22.3)$$

Знаменатель полученного выражения всегда больше нуля (так как случай $\varphi_2 = 0$ исключен из рассмотрения). Если учесть, что n и m в уравнении (22.2) — числа положительные по определению, то, ограничившись пока рассмотрением лишь вещественной части уравнения (22.2), сразу получим:

$$C \left(1 - \exp \frac{4v_2\xi_2}{1-M_2^2} \right) - D \left(1 - \exp \frac{4v_1\xi_1}{1-M_1^2} \right) = 0, \quad (22.4)$$

где C и D — некоторые положительные числа.

Прежде чем приступить к анализу полученного соотношения, обратим внимание на одно важное обстоятельство. Стоящие в показателях степени величины v_1 и v_2 или, в более общем случае, комплексные частоты β_1 и β_2 , входящие в функции φ_1 , φ_2 и φ_3 , различны для «холодного» и «горячего» участков трубы. Это связано с тем, что для используемой в настоящей книге системы безразмерных переменных (4.8) масштабы времени $\frac{L}{a}$ различны по разные стороны Σ вследствие изменения скорости звука a при подогреве газа. В то же время физически очевидно, что размерная частота колебаний должна быть единой для всей трубы. Основываясь на этом, нетрудно

установить связь между β_1 и β_2 :

$$\beta_1 = \frac{a_2}{a_1} \beta_2 = n \beta_2. \quad (22.5)$$

Следовательно, между v_1 и v_2 будет существовать аналогичное соотношение:

$$v_2 = \frac{1}{n} v_1.$$

Теперь равенству (22.4) можно придать более удобный вид

$$C \left(1 - \exp_n \frac{4v_1 \xi_2}{(1 - M_2^2)} \right) + D \left(\exp \frac{4v_1 \xi_1}{1 - M_1^2} - 1 \right) = 0. \quad (22.6)$$

Рассмотрим соотношение (22.6) более подробно. В нем величины C , D , $\frac{4}{n(1 - M_2^2)}$ и $\frac{4}{1 - M_1^2}$ положительны. Координаты узлов давления ξ_1 и ξ_2 имеют разные знаки: $\xi_1 < 0$ и $\xi_2 > 0$. Следовательно, оба слагаемых левой части уравнения (22.6) имеют одинаковые знаки, независимо от знака v . Равенство нулю этой суммы возможно лишь в том случае, если каждое слагаемое в отдельности равно нулю. Отсюда сразу находим:

$$v_1 = 0.$$

Таким образом, здесь получен тот же результат, что и выше, при энергетическом рассмотрении задачи: если $\delta E = \delta X = 0$, то возникают нейтральные колебания. Следует заметить, что в настоящем параграфе этот вывод получен лишь для частного вида краевых условий — узлов давления на концах трубы. Однако его легко распространить и на более общий случай. Пусть слева и справа от Σ в некоторых (необязательно концевых) сечениях ξ_1 и ξ_2 будут располагаться не узлы давления, а узлы скорости или узел скорости с одной, а узел давления с другой стороны. Изменение краевых условий указанным здесь образом приведет к характеристическим уравнениям типа (22.2). Отличие будет сводиться к тому, что вместо отношений функций $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ в уравнения войдут отношения $\frac{\varphi_2}{\varphi_1}$ либо одновременно $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ и $\frac{\varphi_2}{\varphi_1}$. Однако из теории комплексных

чисел известно, что знаки вещественных частей комплексных чисел z и $\frac{1}{z}$ одинаковы. Поскольку приведенный выше вывод основан именно на рассмотрении знаков вещественных частей функции $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$, он будет справедлив и для характеристических уравнений, содержащих $\frac{\varphi_2}{\varphi_1}$ или $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ и $\frac{\varphi_2}{\varphi_1}$ одновременно.

Полученный здесь результат, как уже указывалось, не нов. Однако сравнивая использованный в настоящем параграфе метод решения задачи об устойчивости течения подогреваемого газа с развитым ранее энергетическим методом, можно указать на известные преимущества рассмотренного здесь способа решения. В отличие от энергетического метода прямое решение характеристического уравнения позволяет найти, в частности, частоты колебаний.

Действительно, вернемся к уравнению (22.2). Используя формулу (22.3), напишем теперь второе следствие из уравнения (22.2), приравняв нулю его мнимую часть. При этом учтем, что $v = 0$, и применим известное тригонометрическое тождество

$$\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Тогда получим

$$n \operatorname{ctg} \frac{\omega_1 \xi_2}{n(1 - M_2^2)} - m \operatorname{ctg} \frac{\omega_1 \xi_1}{1 - M_1^2} = 0. \quad (22.7)$$

Уравнение (22.7) позволяет найти дискретный ряд частот ω , удовлетворяющих характеристическому уравнению.

Пусть теперь процесс в зоне теплоподвода характеризуется условием $\delta X = 0$. Это соответствует рассмотренному в предыдущих главах первому элементарному процессу. Тогда условия на Σ (17.1) примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_1 &= n\bar{v}_2 - \delta E, \\ \bar{p}_1 &= m\bar{p}_2. \end{aligned} \right\} \quad (22.8)$$

Чтобы связать явным образом величину δE с фазой колебания, примем, что

$$\delta E = y \bar{p}_1, \quad (22.9)$$

где y — некоторое комплексное число.

Введенный здесь чисто формальным образом комплексный коэффициент y имеет глубокий физический смысл. Запись равенства (22.9) является формальным введением той обратной связи, о которой говорилось в начале настоящего параграфа. Пусть физический процесс в зоне горения остается неопределенным, но равенство (22.9) указывает, что колебания давления p_1 вызывают соответствующий колебательный процесс в зоне теплоподвода.

Действительно, поскольку $\delta X = 0$ по условию, то δE вполне характеризует возмущения процесса теплоподвода в той мере, в которой это нужно для решения задачи. Равенство (22.9) показывает, что эти возмущения связаны с возмущениями $\bar{p}_1$ и, следовательно, если $\bar{p}_1$ будет колебаться, то колебаться будет и δE , причем с той же частотой. Величина y однозначно определяет соотношение между амплитудами δE и p_1 (модуль числа y) и фазовый сдвиг между ними (аргумент числа y).

Воспользовавшись равенствами (22.8) и (22.9), вернемся к уравнениям (22.1). В рассматриваемом случае характеристическое уравнение рассматриваемой системы будет отличаться от уравнения (22.2) лишь правой частью:

$$n \frac{\varphi_1(\xi_2)}{\varphi_2(\xi_2)} - m \frac{\varphi_1(\xi_1)}{\varphi_2(\xi_1)} = -my. \quad (22.10)$$

Ограничившись, как и выше, рассмотрением вещественной части уравнения (22.10) и приводя те же рассуждения, что и при получении равенства (22.6), напомним соотношение, определяющее вещественную часть числа y :

$$\operatorname{Re}(y) = \frac{1}{m} \left[C \left(\exp \frac{4v_1 \xi_2}{n(1-M_2^2)} - 1 \right) + D \left(1 - \exp \frac{4v_1 \xi_1}{1-M_1^2} \right) \right]. \quad (22.11)$$

Анализ этого равенства, основанный на том, что $\frac{4}{n(1-M_2^2)}$ и $\frac{4}{1-M_1^2}$ положительны, в то время как $\xi_1 < 0$

а $\xi_2 > 0$, показывает, что величины, стоящие в круглых скобках, имеют тот же знак, что и v_1 . Но тогда, учитывая, что m , C и D тоже положительные величины, можно утверждать, что вещественная часть числа y имеет знак, совпадающий со знаком v_1 .

Если вернуться к равенству (22.9), то становится очевидным, что знак вещественной части y определяет фазовый сдвиг между δE и $\bar{p}_1$. В частности, положительный знак $\text{Re}(y)$ говорит о том, что сдвиг по фазе между δE и $\bar{p}_1$ меньше по абсолютной величине, чем $\frac{\pi}{2}$, в то время как отрицательному значению $\text{Re}(y)$ соответствует фазовый сдвиг, лежащий между $\frac{\pi}{2}$ и π .

Сопоставив этот результат с полученным в § 12 условием возбуждения в первом элементарном процессе, сразу видим их полное совпадение: система возбуждается ($v > 0$), если сдвиг по фазе между δE и $\bar{p}_1$ по абсолютному значению менее $\frac{\pi}{2}$.

Точно так же, как и в рассмотренном выше случае, в силу совпадения знаков $\text{Re}\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)$ и $\text{Re}\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)$ этот результат распространяется на более общий случай.

Совершенно аналогично можно было бы получить и свойства второго элементарного процесса.

Как видно из материалов настоящего параграфа, выводы, полученные ранее при анализе энергетических соотношений, могут быть получены и непосредственно, путем решения характеристического уравнения. Сравнивая эти два способа, следует сказать, что если энергетические методы несколько проще и отличаются большей наглядностью, то решение характеристического уравнения позволяет не только найти условия возбуждения, но дает возможность численного определения частот колебаний и декрементов (инкрементов) убывания (возрастания) колебаний.

В частности, приравняв вещественную и мнимую части уравнения (22.10) порознь нулю, можно было бы написать два уравнения, связывающие только вещественные

переменные:

$$\begin{aligned} F_1(v_1; \omega_1) &= 0, \\ F_2(v_1; \omega_1) &= 0. \end{aligned}$$

Совместное решение этих двух уравнений позволило бы найти пары значений v_1 и ω_1 , удовлетворяющих характеристическому уравнению (22.10). Здесь это не делается, так как несколько ниже аналогичная задача будет решена для более общего случая.

§ 23. Составление и решение характеристического уравнения

Чтобы проиллюстрировать метод решения задачи об устойчивости газового течения рассматриваемого типа, дадим здесь изложение схемы расчета одного из возможных случаев возбуждения акустических колебаний теплопроводом. В предлагаемом вниманию читателя примере основной следует считать именно методическую сторону решения задачи. Что касается выводов технического или физического характера, которые можно сделать из анализа полученного решения, то они имеют более частный характер.

Рассмотрим течение газа по трубе, причем будем предполагать, что зона переменного во времени теплопровода удовлетворяет необходимым требованиям и уже сведена к некоторой фиктивной поверхности сильного разрыва Σ . Примем те же обозначения, что и в предыдущем параграфе, и пусть краевые условия снова будут соответствовать узлам давления на открытых концах трубы:

$$\bar{p}_1(\xi_1) = 0; \quad \bar{p}_2(\xi_2) = 0.$$

Тогда, воспользовавшись решением (4.13), можно написать

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_1 \Phi_2(\xi_1) + \bar{p}_1 \Phi_1(\xi_1) &= 0, \\ \bar{v}_2 \Phi_2(\xi_2) + \bar{p}_2 \Phi_1(\xi_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (23.1)$$

Пусть условия на Σ заданы в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_2 &= a_{11} \bar{v}_1 + a_{12} \bar{p}_1, \\ \bar{p}_2 &= a_{21} \bar{v}_1 + a_{22} \bar{p}_1. \end{aligned} \right\} \quad (23.2)$$

Эта форма записи отличается от канонической. Ее можно получить из формул (17.5), если сделать предположение, что «холодная» часть течения изэнтропична ($s_1 = 0$) и что характеризующие процесс нестационарного горения величины $\delta E'$ и $\delta X'$ могут быть представлены в виде

$$\left. \begin{aligned} \delta E' &= b_{11}\bar{v}_1 + b_{12}\bar{p}_1, \\ \delta X' &= b_{21}\bar{v}_1 + b_{22}\bar{p}_1. \end{aligned} \right\} \quad (23.3)$$

Написанные здесь равенства опять следует трактовать как формальное введение некоторой обратной связи. Физический смысл формул (23.3) сводится к тому, что процесс горения следует за изменениями давления и скорости перед зоной горения и, в частности, при колебательном изменении $\bar{p}_1$ и $\bar{v}_1$ (образовании акустических волн) процесс горения приобретает колебательный характер. Ниже эта формальная запись будет конкретизирована.

Исключив с помощью (23.2) v_2 и $\bar{p}_2$ из системы (23.1), придем к характеристическому уравнению вида:

$$\begin{vmatrix} \psi_2(\xi_1) & \psi_1(\xi_1) \\ a_{11}\psi_2(\xi_2) + a_{21}\psi_1(\xi_2) & a_{12}\psi_2(\xi_2) - a_{22}\psi_1(\xi_2) \end{vmatrix} = 0. \quad (23.4)$$

Функции ψ_1 и ψ_2 заменим их выражениями согласно формулам (4.14), учитывая при этом соотношение (22.5) и вводя $l_1 = -\xi_1$ и $l_2 = \xi_2$ (чтобы иметь дело с положительными величинами — безразмерными длинами l_1 и l_2 холодной и горячей частей трубы). После ряда преобразований, которые здесь опущены, получим характеристическое уравнение системы в следующей форме¹⁾:

$$C_1 \exp\left(\frac{2l_1}{1-M_1^2} + n \frac{2l_2}{1-M_2^2}\right) \beta + C_2 \exp \frac{2l_1 \beta}{1-M_1^2} + \\ + C_3 \exp \frac{2l_2 \beta}{n(1-M_2^2)} + C_4 = 0, \quad (23.5)$$

¹⁾ Здесь и ниже индексы «единица» у β , v и ω опускаются.

где

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}, \\ C_2 &= a_{11} + a_{12} - a_{21} + a_{22}, \\ C_3 &= a_{11} + a_{12} - a_{21} - a_{22}, \\ C_4 &= -a_{11} - a_{12} - a_{21} - a_{22}. \end{aligned} \right\} \quad (23.6)$$

Следует подчеркнуть, что входящие в выражения (23.2) коэффициенты a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} , характеризующие процессы в зоне горения и их зависимость от акустических колебаний, предполагаются вещественными. Тогда числа C_1 , C_2 , C_3 и C_4 также будут вещественными и будут зависеть лишь от свойств зоны теплоподвода.

Если учесть, что $\beta = \nu + i\omega$, то, подставив выражение β в (23.5) и разделяя вещественную и мнимую части, получим систему двух уравнений для определения ν и ω :

$$\left. \begin{aligned} C_1 e^{(h_1+h_2)\nu} \cos(h_1 + h_2)\omega + C_2 e^{h_1\nu} \cos h_1\omega + \\ + C_3 e^{h_2\nu} \cos h_2\omega + C_4 = 0, \\ C_1 e^{(h_1+h_2)\nu} \sin(h_1 + h_2)\omega + C_2 e^{h_1\nu} \sin h_1\omega + \\ + C_3 e^{h_2\nu} \sin h_2\omega = 0. \end{aligned} \right\} \quad (23.7)$$

Здесь

$$h_1 = \frac{2l_1}{1-M_1^2}; \quad h_2 = \frac{2l_2}{n(1-M_2^2)}. \quad (23.8)$$

Нетрудно убедиться, что решение системы трансцендентных уравнений (23.7) в общем виде практически невозможно. Здесь будет дан графоаналитический метод решения такой системы.

Напишем систему (23.7) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} C_2 e^{h_1\nu} \cos h_1\omega + C_3 e^{h_2\nu} \cos h_2\omega = \\ = -C_4 - C_1 e^{(h_1+h_2)\nu} \cos(h_1 + h_2)\omega, \\ C_2 e^{h_1\nu} \sin h_1\omega + C_3 e^{h_2\nu} \sin h_2\omega = \\ = -C_1 e^{(h_1+h_2)\nu} \sin(h_1 + h_2)\omega. \end{aligned} \right\} \quad (23.9)$$

Возводя в квадрат левые и правые части этих равенств и складывая их, получим:

$$\begin{aligned} C_2^2 e^{2h_1\nu} + 2C_2 C_3 e^{(h_1+h_2)\nu} \cos(h_1 + h_2)\omega + C_3^2 e^{2h_2\nu} = \\ = C_4^2 + 2C_1 C_4 e^{(h_1+h_2)\nu} \cos(h_1 + h_2)\omega + C_1^2 e^{2(h_1+h_2)\nu}. \end{aligned}$$

Элементарные преобразования переводят это соотношение в следующее:

$$[C_2^2 e^{(h_1 - h_2)v} + C_3^2 e^{(h_1 + h_2)v}] - [C_1^2 e^{(h_1 + h_2)v} + C_4^2 e^{-(h_1 + h_2)v}] = \\ = 2[C_1 C_4 \cos(h_1 + h_2)\omega - C_2 C_3 \cos(h_1 - h_2)\omega]. \quad (23.10)$$

Здесь искомые величины v и ω находятся по разные стороны знака равенства. Пользуясь этим обстоятельством, нетрудно построить кривую, определяемую уравнением (23.10) в координатах v, ω . Для этого достаточно построить левую часть как функцию v , правую как функцию ω и перенести точки, удовлетворяющие равенству (23.10), в координатную плоскость v, ω .

Если рассматривать (23.9) как систему линейных неоднородных уравнений для определения величин $C_2 e^{h_1 v}$ и $C_3 e^{h_2 v}$, то можно написать:

$$C_2 e^{h_1 v} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} -C_4 - C_1 e^{(h_1 + h_2)v} \cos(h_1 + h_2)\omega & \cos h_2 \omega \\ -C_1 e^{(h_1 + h_2)v} \sin(h_1 + h_2)\omega & \sin h_2 \omega \end{vmatrix}, \\ C_3 e^{h_2 v} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \cos h_1 \omega & -C_4 - C_1 e^{(h_1 + h_2)v} \cos(h_1 + h_2)\omega \\ \sin h_1 \omega & -C_1 e^{(h_1 + h_2)v} \sin(h_1 + h_2)\omega \end{vmatrix},$$

где определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos h_1 \omega & \cos h_2 \omega \\ \sin h_1 \omega & \sin h_2 \omega \end{vmatrix} = \sin(h_2 - h_1)\omega.$$

Произведя несложные преобразования, можно прийти к следующим равенствам:

$$\left. \begin{aligned} C_2 e^{h_1 v} &= \frac{-C_4 \sin h_2 \omega + C_1 e^{(h_1 + h_2)v} \sin h_1 \omega}{\sin(h_2 - h_1)\omega}, \\ C_3 e^{h_2 v} &= \frac{C_4 \sin h_1 \omega - C_1 e^{(h_1 + h_2)v} \sin h_2 \omega}{\sin(h_2 - h_1)\omega}. \end{aligned} \right\} \quad (23.11)$$

Эти равенства справедливы, конечно, лишь при условии

$$\Delta = \sin(h_2 - h_1)\omega \neq 0.$$

Перемножая соответственно левые и правые части (23.11), найдем после некоторых упрощений

$$C_1^2 e^{2(h_1 + h_2)v} + e^{(h_1 + h_2)v} \times \\ \times \frac{C_2 C_3 \sin^2(h_2 - h_1)\omega - C_1 C_4 (\sin^2 h_1 \omega + \sin^2 h_2 \omega)}{\sin h_1 \omega \sin h_2 \omega} + C_4^2 = 0.$$

Последнее равенство является квадратным уравнением относительно $e^{(h_1+h_2)v}$, и следовательно,

$$e^{(h_1+h_2)v} = \frac{f(\omega) \pm V \overline{f^2(\omega) - 4C_1^2 C_3^2}}{2C_1^2}, \quad (23.12)$$

где

$$f(\omega) = \frac{C_2 C_3 \sin^2(h_2 - h_1)\omega - C_1 C_4 (\sin^2 h_1 \omega + \sin^2 h_2 \omega)}{\sin h_1 \omega \sin h_2 \omega}.$$

В координатах v, ω уравнение (23.12) определяет некоторую кривую, построение которой проводится элементарно.

Искомые значения ω и v , удовлетворяющие системе (23.9), будут координатами точек пересечения кривых (23.10) и (23.12). Здесь следует, однако, указать на некоторую дополнительную трудность. При получении уравнений (23.10) и (23.12) оказалось необходимым произвести такие действия, как возведение в квадрат, почленное перемножение двух равенств. В результате система из уравнений (23.10) и (23.12) дает не только корни системы (23.9), но ряд лишних корней, которые необходимо отделить. Отделение корней проще всего производить непосредственной проверкой — подстановкой найденных графически значений v и ω во второе уравнение системы (23.7).

Приведем пример подобного расчета. Пусть $l_1 = l_2 = 0,5$, температура воздуха до подогрева 288°K , после подогрева 1500°K , а скорость холодного течения 50 м/сек . Процессы в зоне теплопровода примем такими, что $\bar{J}_1 = \bar{J}_2 = \bar{J}_3 = 0$ и возбуждение системы может происходить только за счет возмущения теплопровода $\bar{Q}$. Тогда при некоторых фиксированных свойствах $\bar{Q}$, которые будут указаны ниже, можно провести расчет по описанной выше методике.

Не приводя никаких численных расчетов и промежуточных построений, дадим сразу график, по которому определяются значения v и ω . Как только что было показано, эти величины могут быть найдены как точки пересечения кривых в плоскости v, ω , определяемых уравнениями (23.10) и (23.12). Обозначим первые из них $F(v, \omega) = 0$, а вторые $f(v, \omega) = 0$.

На рис. 33 это построение дано для рассматриваемого конкретного случая. Следует лишь иметь в виду, что

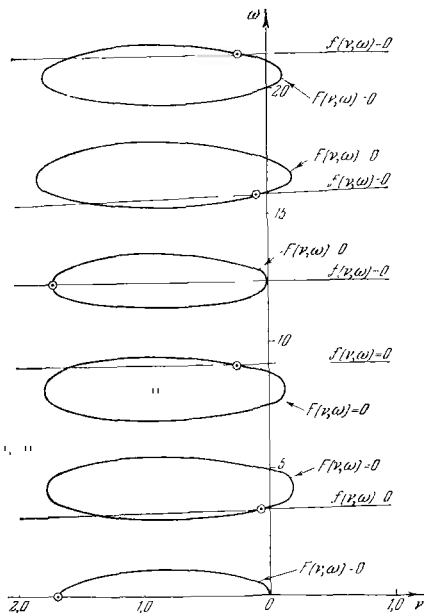


Рис. 33. Графический метод нахождения корней характеристического уравнения.

ветви $f(\nu, \omega) = 0$, которые давали лишние корни, на рис. 33 опущены. Кроме того, поскольку изменение знака ω на обратный не меняет системы исходных уравнений (23.7),

построение сделано лишь для положительных ω . Точки плоскости ν , ω , являющиеся решениями, отмечены кружочками. Приведенное построение представляет интерес (и является типичным) с двух точек зрения. Прежде всего бросается в глаза то обстоятельство, что частоты колебаний, которые допускаются системой, отличаются от частот, определенных по привычной акустической методике. Действительно, колебания в цилиндрической трубе с двумя открытыми концами должны, казалось бы, иметь следующие периоды: наибольший, равный времени, необходимому для того, чтобы звуковая волна успела переместиться от входа к выходу трубы и обратно, и серию периодов, составляющих $1/2$, $1/3$, $1/4$... и т. д. части наибольшего периода (см. §§ 5 и 6). Если проделать такой расчет для рассматриваемого случая, то окажется, что система должна допускать следующий ряд частот:

$$\omega = 0; 4,11; 8,22; 12,33; 16,44; 20,55; \dots$$

Фактически же допускаются:

$$\omega = 0; 3,38; 9,1; 12,33; 15,7; 21,4; \dots$$

Эта особенность рассматриваемого случая объясняется следующим образом.

При прохождении звуковой волной поверхности разрыва Σ некоторая часть ее отражается и идет обратно. Поэтому элементарные соображения, приводящие к привычному акустическому правилу, здесь неприменимы. Сложная игра преломленных и отраженных волн с учетом их отражений от обоих концов трубы дает результат, приведенный во второй строке частот ω . Сравнение обеих строк показывает, что простое акустическое правило можно применять только в тех случаях, когда требуется грубая оценка частот.

Второй особенностью, выявленной приведенным расчетом, является то, что различные гармоники затухают с различными декрементами. В рассматриваемом численном примере наиболее близкими к границе устойчивости ($\nu = 0$) оказались первая и четвертая гармоники. Что касается аperiodического члена ($\omega = 0$) и третьей гармоники, то они наиболее устойчивы. Поэтому при сравнительно

малом изменении параметров поверхности Σ (малом изменении Q) наиболее вероятно возникновение колебательной неустойчивости с частотами первой и четвертой гармоник.

Поскольку в реальных процессах высокие гармоники характеризуются при прочих равных условиях повышенным рассеиванием энергии, то в случае возникновения неустойчивости рассматриваемая система скорее всего даст колебания с частотой первой гармоники (основного тона). Таким образом, проведенный расчет позволяет понять, как колебательная система «выбирает» частоту колебаний.

§ 24. Построение границ устойчивости

Приведенное в предыдущем параграфе решение характеристического уравнения рассматриваемой задачи основывалось на том, что процессы в зоне теплоподвода можно описать равенствами (23.3). Рассмотрим вопрос о свойствах зоны теплоподвода более подробно. Чтобы существенно упростить анализ условий возбуждения, сделаем предположение, что величины $\delta E'$ и $\delta X'$ зависят от одного комплексного параметра; выше такой параметр $\bar{Y}$ уже вводился. Этим параметром в конкретных случаях может быть, например, возмущение эффективной линейной скорости горения $\bar{U}_1$, возмущение теплоподвода $\bar{Q}$ или иной величины, характеризующей нестационарное горение. Остановимся на каком-либо конкретном предположении. Пусть, например, этим существенным параметром будет возмущение теплоподвода $\bar{Q}$. Тогда равенства (17.4) позволяют написать

$$\left. \begin{aligned} \delta E' &= b_{13} \bar{Q}, \\ \delta X' &= b_{23} \bar{Q}. \end{aligned} \right\} \quad (24.1)$$

Сравнивая эти выражения с формулами (23.3), можно видеть, что безразмерное возмущение теплоподвода $\bar{Q}$ должно в явной форме зависеть от $\bar{p}_1$ и v_1 :

$$Q = Q_0 \bar{v}_1 + Q_p p_1. \quad (24.2)$$

Но тогда формулам (23.2), являющимся следствием равенств (17.5), можно придать такой вид:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_2 &= (a'_{11} + a''_{11}Q_v) \bar{v}_1 + (a'_{12} + a''_{12}Q_p) \bar{p}_1, \\ \bar{p}_2 &= (a'_{21} + a''_{21}Q_v) \bar{v}_1 + (a'_{22} + a''_{22}Q_p) \bar{p}_1. \end{aligned} \right\} \quad (24.3)$$

Здесь $a'_{11} + a''_{11}Q_v = a_{11}$; ... и т. д. Из формулы (24.2) видно, что Q полностью определяется (при заданных $\bar{p}_1$ и $\bar{v}_1$) коэффициентами Q_v и Q_p . Раньше для определения возмущения Q бралась его амплитуда и фаза, теперь — проекции вектора $\bar{Q}$ на $\bar{p}_1$ и $\bar{v}_1$. Оба способа записи $\bar{Q}$ можно применять с одинаковым успехом. Применявшееся в предыдущих параграфах задание Q (или $\dot{Y}$ и т. п.) через амплитуду и фазу имеет преимущество большой общности. Однако в некоторых случаях, когда известна зависимость тепловыделения от состояния колебательной системы, бывает удобно выразить эту зависимость в явном виде. Пусть, например, тепловыделение $\bar{Q}$ — известная функция давления и скорости

$$Q = Q(v_1; p_1)$$

и не зависит от иных параметров. Тогда, взяв вариацию от этого выражения и перейдя к принятой системе безразмерных переменных, можно написать

$$\bar{Q} = C_1 \frac{\partial Q}{\partial v_1} \bar{v}_1 + C_2 \frac{\partial Q}{\partial p_1} \bar{p}_1, \quad (24.4)$$

где C_1 и C_2 — некоторые постоянные.

Сравнивая выражения (24.2) и (24.4), убеждаемся в том, что коэффициенты Q_v и Q_p пропорциональны $\frac{\partial Q}{\partial v_1}$ и $\frac{\partial Q}{\partial p_1}$, т. е. выражают некоторую реально существующую зависимость тепловыделения от скорости течения и давления.

Рассмотрим вопрос о границах устойчивости при записи свойств плоскости разрыва Σ в виде равенств (24.3). Применим для этой цели прием, использованный в § 19: будем рассматривать $\bar{v}_1$, $\bar{p}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{p}_2$ в качестве векторов

и возьмем скалярное произведение равенств (24.3) друг на друга. В силу ортогональности $\bar{p}$ и $\bar{v}$ при $v=0$ произведения $\bar{p}\bar{v}$ обратятся в нуль, что даст следующую связь между коэффициентами Q_p и Q_v на границе устойчивости:

$$\bar{v}_1^2 (a'_{11} + a''_{11} Q_v) (a'_{21} + a''_{21} Q_v) + \bar{p}_1^2 (a'_{12} + a''_{12} Q_p) (a'_{22} + a''_{22} Q_p) = 0. \quad (24.5)$$

Для каждого заданного отношения $\frac{\bar{v}_1^2}{\bar{p}_1^2}$ уравнение (24.5) определяет кривую второго порядка в плоскости $(Q_p; Q_v)$. Все эти кривые проходят через четыре точки A, B, C и D

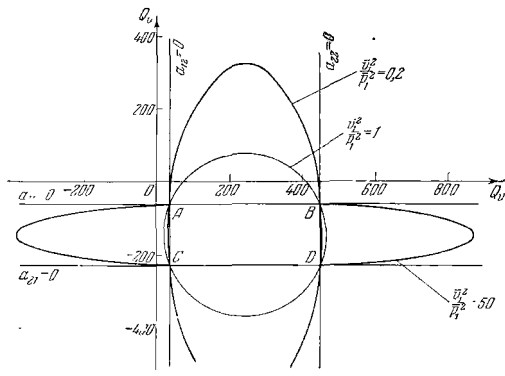


Рис. 34. Диаграмма устойчивости в плоскости переменных Q_p и Q_v .

(рис. 34), координаты которых находятся приравливанием нулю первой и третьей, второй и четвертой и т. д. круглых скобок в уравнении (24.5), а сами кривые лежат внутри полос, ограниченных прямыми, параллельными осям координат и идущими через эти точки. Более

подробный численный анализ показывает, что семейство кривых является семейством эллипсов, три из которых показаны на рис. 34, построенном для течений, характеризуемых $M_1 = 0,1$; $M_2 = 0,25$.

Изображенные на рис. 34 эллипсы ни в коем случае нельзя рассматривать в качестве границ устойчивости. Полученные из энергетических соображений для постоянных $\frac{\bar{p}_1^2}{v_1^2}$ и, следовательно, без учета краевых условий, эти эллипсы обладают лишь одним важным свойством: точки, соответствующие границам устойчивости, могут лежать только на полученных эллипсах, а следовательно, только внутри или на границах вертикальной и горизонтальной полос, определяемых прямыми $a'_{11} + a''_{11} Q_0 = 0, \dots$ и т. д. (или, в более короткой записи, прямыми $a_{11} = 0, a_{12} = 0, a_{21} = 0$ и $a_{22} = 0$).

Диаграммы устойчивости для простейших случаев. Располагаясь внутри или на границах найденных полос, границы устойчивости, построенные с учетом краевых условий, могут давать различные конфигурации областей устойчивости. Покажем это для предельных случаев. Пусть длина l_1 пренебрежимо мала, т. е. вся труба занята горячими газами, а горение происходит во входном сечении. Тогда перед зоной горения должно выполняться принятое выше краевое условие $\bar{p}_1 = 0$. Это сразу приводит к обращению в нуль второго слагаемого уравнения (24.5), и единственными границами устойчивости (вне зависимости от величины $\bar{v}_1$) будут прямые $a_{11} = 0$ и $a_{21} = 0$. Соответствующая диаграмма устойчивости приведена на рис. 35, а. Поскольку известно, что начало координат соответствует устойчивому режиму, область неустойчивости (заштрихованная часть диаграммы) находится сразу. На том же рисунке (диаграмма б) для полноты приведен случай, когда краевое условие при $l_1 = 0$ имеет вид $\bar{v}_1 = 0$ (закрытый конец). Тогда совершенно так же получаем границы в виде равенств $a_{12} = 0$ и $a_{22} = 0$ для всех $\bar{p}_1$.

Другим предельным случаем будет труба с пренебрежимо малой длиной горячей части течения: $l_2 = 0$. Найдем границы устойчивости для краевого условия $\bar{p}_2 = 0$. С этой целью перепишем уравнения (23.2) следующим

образом:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_1 &= \frac{1}{\Delta} (a_{12}\bar{v}_2 - a_{12}\bar{p}_2), \\ \bar{p}_1 &= \frac{1}{\Delta} (-a_{21}\bar{v}_2 + a_{11}\bar{p}_2), \end{aligned} \right\} \quad (24.6)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

и предполагается, что $\Delta \neq 0$. Взяв, как и раньше,

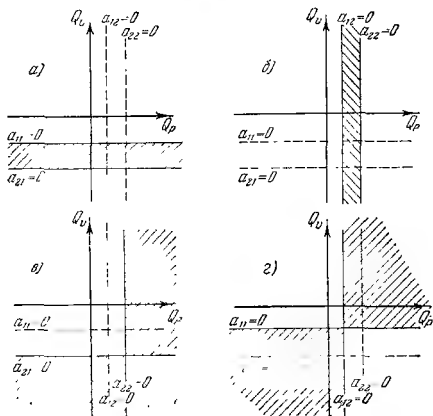


Рис. 35. Диаграммы устойчивости для предельных случаев.

скалярное произведение равенств (24.6) друг на друга ($\bar{v}$ и $\bar{p}$ считаем векторами), вместо уравнения (24.5) получим:

$$\bar{v}_2^2 a_{21} a_{22} + \bar{p}_2^2 a_{11} a_{12} = 0, \quad (24.7)$$

откуда при $\bar{p}_2 = 0$ сразу находим границы устойчивости для произвольных $\bar{v}_2$: $a_{21} = 0$ и $a_{22} = 0$. Соответствующий тип диаграммы устойчивости приведен на рис. 35, в. В отличие от диаграмм типа а и б, область неустойчивости укладывается здесь не внутрь полос, а полностью охватывает два квадранта всей бесконечной плоскости параметров Q_p , Q_v . Так же, как и в предыдущем случае, приведем для полноты диаграмму устойчивости, соответствующую краевому условию $\bar{v}_2 = 0$. Тогда для всех p_2 границами области устойчивости станут прямые $a_{11} = 0$ и $a_{12} = 0$, что даст диаграмму г) на рис. 35.

Как видно из приведенного примера, конфигурация областей устойчивости может в рассматриваемом случае изменяться весьма сильно в зависимости от того, каковы величины $\bar{p}_1$, $\bar{v}_1$, p_2 и $\bar{v}_2$ в плоскости подвода тепла. Такое разнообразие конфигураций связано, в частности, с тем, что границы устойчивости могут уходить в бесконечность. Если построить аналогичные границы в системе координат, принятой в § 19, то случаи $\bar{p}_1 = 0$ и $\bar{v}_1 = 0$ дали бы совершенно однотипные конфигурации областей неустойчивости — окружности. Эти окружности приведены, например, на рис. 28. Что касается случаев $\bar{p}_2 = 0$ и $\bar{v}_2 = 0$, то в системе координат § 19 построение областей неустойчивости не дало бы столь простых границ. Дело в том, что эта система предполагает ориентировку векторов $\bar{p}_1$ и $\bar{r}_1$ в положительных направлениях осей координат, в то время как положение векторов $\bar{p}_2$ и $\bar{v}_2$ остается произвольным. Это и ряд дополнительных трудностей делает нецелесообразным подробное рассмотрение границ такого рода.

Использование переменных Q_p и Q_v хотя и усложняет конфигурации границ устойчивости, но зато может упростить анализ условий возбуждения, как это будет видно из содержания следующего параграфа.

Прежде чем перейти к вопросу о конфигурации границ устойчивости в плоскости параметров Q_p , Q_v при l_1 и l_2 , одновременно отличных от нуля, укажем еще на одно свойство диаграмм устойчивости, приведенных на рис. 35.

При $Q_p \rightarrow \pm \infty$ или $Q_v \rightarrow \pm \infty$ декремент затухания (или инкремент возрастания) колебаний стремится к нулю. Таким образом, в бесконечности как бы располагается еще одна граница устойчивости. Это можно показать различными способами. Здесь будет дано доказательство этого утверждения путем анализа характеристического уравнения системы (23.7), что позволит попутно осветить еще один вопрос. Возьмем, для примера, диаграмму устойчивости, приведенную на рис. 35, в. Положив $l_2 = 0$, получим $h_2 = 0$ и равенства (23.7) примут крайне простой вид:

$$\left. \begin{aligned} (C_1 + C_2) e^{h_1 v} \cos h_1 \omega + C_3 + C_4 &= 0, \\ (C_1 + C_2) e^{h_1 v} \sin h_1 \omega &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (24.8)$$

Очевидно, что собственные частоты будут определяться равенством $\sin h_1 \omega = 0$; не уточняя их, заметим лишь, что при этом $\cos h_1 \omega = \pm 1$. Так как $e^{h_1 v}$ может быть лишь положительной величиной, то знак $\cos h_1 \omega$ будет совпадать со знаком отношения $-\frac{C_3 + C_4}{C_1 + C_2}$, что позволяет написать

$$v = \frac{1}{h_1} \ln \left| \frac{C_3 + C_4}{C_1 + C_2} \right|.$$

Воспользуемся связью (23.6) между C_1, C_2, C_3 и C_4 , с одной стороны, и a_{11}, a_{12}, a_{21} и a_{22} , с другой, а также формулами (24.3), чтобы придать последнему равенству вид

$$v = \frac{1}{h_1} \ln \left| \frac{(a'_{21} + a'_{22}) + a''_{21} Q_v + a''_{22} Q_p}{(a'_{22} - a'_{21}) - a''_{21} Q_v + a''_{22} Q_p} \right|. \quad (24.9)$$

Положив в (24.9) $v = 0$ (условие существования границы устойчивости), легко найти с учетом (23.2) и (24.3) уже известные границы устойчивости $a_{21} = 0$ и $a_{22} = 0$, кроме того, еще $Q_p = \pm \infty$ и $Q_v = \pm \infty$. Совершенно так же доказывается это положение и для других типов диаграмм, приведенных на рис. 35.

Формула (24.9) дает возможность указать на одно обстоятельство, которое надо всегда иметь в виду. При некоторых комбинациях Q_p и Q_v числитель или знаменатель дроби, стоящей под знаком абсолютной величины, может обратиться в нуль. Этому будет соответствовать

$\nu \rightarrow +\infty$ или $\nu \rightarrow -\infty$. Таким образом, рассуждая формально, можно утверждать, что где-то в плоскости параметров Q_p, Q_v расположены две прямые, которым соответствует бесконечно большая устойчивость или бесконечно большая неустойчивость течения. В действительности это связано с тем, что задача об устойчивости течения рассматривается здесь, как и везде в данной книге,

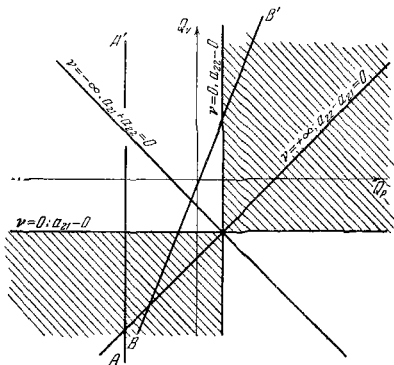


Рис. 36. Характерные линии на диаграмме устойчивости.

без учета начальных условий. Но подобный подход справедлив лишь для таких режимов колебаний, для которых можно допустить, что рассматриваемый момент времени достаточно удален от начального и вследствие рассеивания энергии, неизбежного в реальной системе, влияние начальных условий достаточно ослаблено. Этим предположениям могут соответствовать только режимы пейтральных или близких к ним колебаний. Если же в результате решения задачи получены значения $\nu = \pm \infty$, то это говорит лишь о том, что необходим учет начальных условий и нелинейных свойств системы. Получив значе-

ния $\nu = \pm \infty$, можно, по-видимому, утверждать, что в окрестности соответствующих значений Q_p и Q_v система становится особенно устойчивой или особенно неустойчивой.

Если с учетом этой оговорки построить линии $\nu = 0$ и $\nu = \pm \infty$ в плоскости параметров Q_p, Q_v , то будет получена совершенно симметричная картина, изображенная на рис. 36. Прямые $\nu = +\infty$ и $\nu = -\infty$ идут под 45° к осям координат, поскольку $a_{21}'' = a_{22}'' = b_{23}$. Точно такие же рассуждения можно было бы провести и для диаграмм

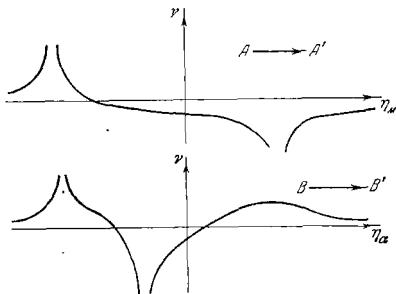


Рис. 37. Изменение величины ν при движении вдоль прямых AA' и BB' на рис. 36.

a, b и c на рис. 35, получив на них линии $\nu = +\infty$ и $\nu = -\infty$. Эти линии позволяют составить качественно правильную картину изменения ν на всей плоскости параметров. Если, например, считать, что Q_p остается постоянной величиной, а Q_v изменяется (линия AA' на рис. 36), то кривая изменения ν будет иметь вид, показанный в верхней части рис. 37, а если сместиться по некоторой прямой BB' , то изменение ν в зависимости от положения изображающей точки на линии BB' будет иметь вид, показанный в нижней части рис. 37.

Границы устойчивости для общего случая. Для построения границы устойчивости в общем случае целесообразно поступать следующим образом.

Коэффициенты C_1, C_2, C_3 и C_4 , входящие в систему (23.7), являются линейными функциями Q_p и Q_v . В самом деле, указанные коэффициенты составляются из линейных комбинаций a_{11}, a_{12}, a_{21} и a_{22} , которые, как уже указывалось, равны

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= a'_{11} + a''_{11} Q_v, & a_{12} &= a'_{12} + a''_{12} Q_p, \\ a_{21} &= a'_{21} + a''_{21} Q_v, & a_{22} &= a'_{22} + a''_{22} Q_p. \end{aligned} \right\} \quad (24.10)$$

Поэтому систему (23.7) можно представить как линейную относительно Q_p и Q_v с коэффициентами, зависящими от v и ω , причем v и ω следует рассматривать в качестве параметров системы. Несложные алгебраические преобразования позволяют написать вместо (23.7) следующую систему:

$$\left. \begin{aligned} Q_p F_{11}(v, \omega) + Q_v F_{12}(v, \omega) &= F_{13}(v, \omega), \\ Q_p F_{21}(v, \omega) + Q_v F_{22}(v, \omega) &= F_{23}(v, \omega). \end{aligned} \right\} \quad (24.11)$$

Здесь функции F_{ik} являются суммами вида

$$a_1 e^{(h_1 + h_2)v} \cos(h_1 + h_2)\omega + a_2 e^{h_1 v} \cos h_1 \omega + a_3 e^{h_2 v} \cos h_2 \omega + a_4,$$

для первого равенства написанной системы и суммами вида

$$b_1 e^{(h_1 + h_2)v} \sin(h_1 + h_2)\omega + b_2 e^{h_1 v} \sin h_1 \omega + b_3 e^{h_2 v} \sin h_2 \omega$$

для второго равенства (a_i, b_i — некоторые постоянные коэффициенты).

Фиксируя значения v и ω , можно, вообще говоря, находить соответствующие им Q_p и Q_v :

$$Q_p = \frac{\Delta_p}{\Delta}; \quad Q_v = \frac{\Delta_v}{\Delta}, \quad (24.12)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_{11}(v, \omega) & F_{12}(v, \omega) \\ F_{21}(v, \omega) & F_{22}(v, \omega) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} F_{13}(v, \omega) & F_{12}(v, \omega) \\ F_{23}(v, \omega) & F_{22}(v, \omega) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_v = \begin{vmatrix} F_{11}(v, \omega) & F_{13}(v, \omega) \\ F_{21}(v, \omega) & F_{23}(v, \omega) \end{vmatrix}.$$

При $\Delta = 0$ система подлежит дополнительному исследованию. Если при этом одновременно оказывается, что $\Delta_p = 0$ (или $\Delta_v = 0$), то, как известно, уравнения (24.11) являются линейно зависимыми и их совокупность определяет не точку в плоскости параметров (Q_p, Q_v) , а прямую. Ниже этот случай будет рассмотрен более подробно.

Если отвлечься от комбинаций значений (v, ω) , для которых $\Delta = 0$, то каждой точке в плоскости (v, ω) будет соответствовать точка в плоскости параметров (Q_p, Q_v) . При движении по произвольной кривой в плоскости (v, ω) равенства (24.12) дают возможность находить соответствующую кривую в плоскости параметров (Q_p, Q_v) .

Практически чаще всего приходится рассматривать движение в плоскости (v, ω) по прямым, параллельным оси ω . Эти прямые соответствуют режимам колебаний с постоянными значениями v . Здесь можно, в частности, рассмотреть режим с $v = v_1$ ($v_1 < 0$), т. е. с постоянным декрементом затухания колебаний; режим $v = v_2$ ($v_2 > 0$), т. е. постоянным инкрементом возрастания колебаний, и, наконец, режим $v = 0$ — границу устойчивости. Последний режим представляет обычно наибольший интерес. Поскольку во всех этих случаях $v = \text{const}$, то коэффициенты F_{ih} системы (24.11) становятся для каждой из соответствующих кривых в плоскости (Q_p, Q_v) функцией только одного параметра — частоты ω .

Построив серию таких кривых для различных $v = \text{const}$ и для всех значений частот $0 < \omega < \infty$ на каждой кривой¹⁾, можно получить полную и весьма наглядную картину поведения колебательной системы при любых Q_p и Q_v .

Построение этих диаграмм является несложной, но достаточно утомительной работой. Принимая во внимание то, что с увеличением ω в реальных системах заметно возрастают потери, при расчетах следует ограничиваться некоторой разумной величиной ω . Обычно для грубого задания верхней границы ω порядок ожидаемых частот можно оценить достаточно точно.

¹⁾ Из уравнений (23.7) видно, что изменение знака ω не приводит к нарушению равенств, следовательно, достаточно рассматривать интервал $0 < \omega < \infty$ вместо $-\infty < \omega < \infty$.

Чтобы дать наглядное представление о такого рода диаграммах, рассмотрим пример построения. Приведенный ниже пример является достаточно типичным, и в то же время выбран так, что построение линий $\nu = \text{const}$ оказывается возможным провести без утомительного вычисления координат точек этих кривых.

Пусть плоскость теплоподвода Σ расположена в сечении трубы, которое определяется равенством

$$h_1 = h_2 = h.$$

Тогда система уравнений (23.7) заметно упрощается и принимает следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} C_1 e^{2h\nu} \cos 2h\omega + (C_2 + C_3) e^{h\nu} \cos h\omega + C_4 = 0, \\ \sin h\omega [2C_1 e^{2h\nu} \cos h\omega + e^{h\nu} (C_2 + C_3)] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (24.13)$$

Найдем границу устойчивости. Для этого исследуем систему (24.13) при $\nu = 0$.

Рассмотрим сначала особый случай: $\sin h\omega = 0$. Значению $\sin h\omega = 0$ соответствуют два возможных значения $\cos h\omega$. При $\cos h\omega = 1$ из первого уравнения (24.13) имеем:

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0, \quad (24.14)$$

или, в соответствии с формулами (23.6) $a_{21} = 0$, что дает на основании равенств (24.10) прямую

$$Q_\nu = - \frac{a'_{12}}{a''_{21}}. \quad (24.15)$$

Для $\cos h\omega = -1$

$$C_1 - (C_2 + C_3) + C_4 = 0, \quad (24.16)$$

что после аналогичных преобразований приводит к $a_{12} = 0$, т. е.

$$Q_\nu = - \frac{a'_{12}}{a''_{12}}. \quad (24.17)$$

Пусть теперь $\sin h\omega \neq 0$. Тогда, сокращая на этот множитель второе равенство (24.13), найдем путем исключения $\cos h\omega$ из системы уравнений (24.13), следующее условие существования границы устойчивости:

$$-C_1 + C_4 = 0, \quad (24.18)$$

н. III

$$a_{11} + a_{22} = 0. \quad (24.19)$$

Воспользовавшись формулами (24.10), напомним уравнение этой прямой в плоскости (Q_p, Q_s)

$$a'_{22}Q_p + a'_{11}Q_s + a'_{11} + a'_{22} = 0. \quad (24.20)$$

Здесь надо заметить, что если прямые (24.15) и (24.17) целиком являются границами устойчивости, то относительно полученной прямой (24.20) этого сказать нельзя. Последнее связано с тем, что $\cos h\omega$ в уравнениях (24.13) не может иметь абсолютной величины, превышающей единицу. Пойдем концы отрезка, лежащего на прямой (24.20) и принадлежащего границе устойчивости системы. Второе равенство (24.13) после сокращения на $\sin h\omega$ и использования (24.18) принимает следующий вид:

$$(C_1 + C_4) \cos h\omega + (C_2 + C_3) = 0.$$

При изменении ω от 0 до ∞ $\cos h\omega$ будет периодически меняться от 1 до -1 . В крайних точках $\cos h\omega$, равному ± 1 или -1 , будут соответствовать уравнения

$$C_1 + C_4 + C_2 + C_3 = 0,$$

$$C_1 + C_4 - (C_2 + C_3) = 0.$$

Сравнивая эти равенства с формулами (24.14) и (24.16), нетрудно видеть, что концы искомого отрезка лежат на прямых (24.15) и (24.17).

Следовательно, границами устойчивости в рассматриваемом случае будут две прямые, параллельные осям координат, и наклонный отрезок, лежащий между этими прямыми.

Построение границ устойчивости бывает полезно дополнить аналогичным вышеприведенному построением линий постоянных ν .

Следует лишь учесть, что при $\nu \neq 0$ во все формулы вместо C_1 войдет $C_1 e^{2h\nu}$, а вместо $C_2 + C_3$ надо будет писать $(C_2 + C_3) e^{h\nu}$. Осуществление этих расчетов совершенно элементарно и здесь излагаться не будет. Легко сообразить, что и в этом случае в рассматриваемом примере линиями постоянных ν будут служить прямые линии.

Диаграмма границ устойчивости и линий, равных ν для $e^{h\nu} - 1,1$ ($\nu > 0$) и $e^{h\nu} = \frac{1}{1,1}$ ($\nu < 0$), построенная по указанной здесь методике, дана на рис. 38. Построение выполнено для $M_1 = 0,1$, $M_2 = 0,25$.

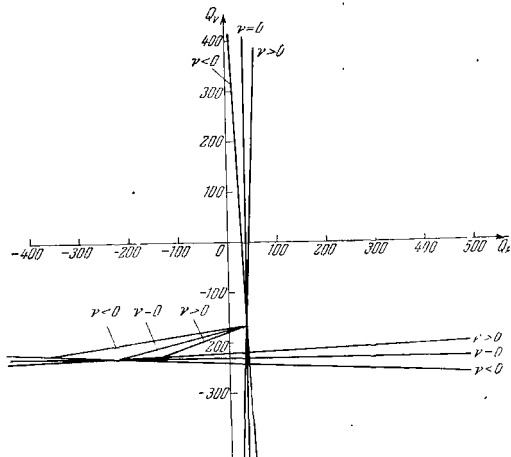


Рис. 38. Линии равных ν вблизи границы устойчивости.

Как видно из приведенной диаграммы, распределение областей устойчивости ($\nu < 0$) и неустойчивости ($\nu > 0$) напоминает распределение их на рис. 35, а и з. Диаграмма 38 указывает на одно существенное обстоятельство, которое всегда следует иметь в виду. Линии равных ν (на рис. 38 три группы линий, условно помеченные $\nu < 0$, $\nu = 0$ и $\nu > 0$) пересекаются в плоскости параметров колебательной системы (Q_p , Q_v). Следовательно, в точке пересечения линий $\nu > 0$ и $\nu < 0$ система должна быть одновремен-

но и неустойчивой и устойчивой, в точке пересечения линий $\nu = 0$ и $\nu > 0$ нейтральной и неустойчивой одновременно и т. д. Этот вывод не содержит в себе неразрешимого противоречия, как это может показаться на первый взгляд. Дело в том, что пересекающимися линиям соответствуют разные частоты, а то, что одна гармоника при заданных Q_p и Q_c может быть более устойчивой, а другая менее устойчивой, почти очевидно. Пример этого приведен, в частности, на рис. 38. Если бы вместо рис. 38 была построена пространственная диаграмма с частотой ω , отложенной по третьей оси, то линии равных ν и не пересекались бы, а перекрещивались на разных высотах (при разных ω). Чтобы дать возможность судить о том, каким частотам соответствуют точки на линиях равных декрементов, вдоль этих линий бывает полезным делать разметку частот. На рис. 38 такая разметка не сделана, однако читатель без труда может восполнить этот пробел, если учтет, что прямая, идущая вдоль оси Q_c , получена для $\sin h\omega = 0$ и $\cos h\omega = -1$; прямая, идущая вдоль оси Q_p — для $\sin h\omega = 0$ и $\cos h\omega = 1$, а группа наклонных прямых — для всех остальных ω .

Не следует думать, что для отделения областей устойчивости от областей неустойчивости необходимо, помимо линий $\nu = 0$, строить еще линии $\nu > 0$ и $\nu < 0$. Такой более ограниченный результат можно получить и проще, воспользовавшись так называемым правилом штриховки. Это правило часто используется в теории автоматического регулирования, где иногда носит название метода D -разбиения пространства параметров системы. Хотя этот метод используется в теории регулирования для характеристического уравнения, имеющего вид полинома, он остается справедливым и для трансцендентных уравнений. Желая ознакомиться более полно с этим методом, полезно обратиться к специальным руководствам ¹⁾. Здесь будет дано лишь краткое понятие об этом методе и указаны практические приемы пользования им.

Математическую основу описываемого ниже правила штриховки можно изложить следующим образом. Уравне-

¹⁾ См., например, М. А. Айзерман, Лекции по теории автоматического регулирования, Гостехиздат, Москва, 1958

ния (24.11), которые будут кратко записаны так:

$$\left. \begin{aligned} R(Q_p, Q_v, \nu, \omega) &= 0, \\ I(Q_p, Q_v, \nu, \omega) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (24.21).$$

можно рассматривать в качестве уравнений преобразования некоторой области в плоскости (ν, ω) в область в плоскости (Q_p, Q_v) и обратно. Слева на рис. 39 дана плоскость (ν, ω) . Каждой точке этой плоскости соответствует вполне

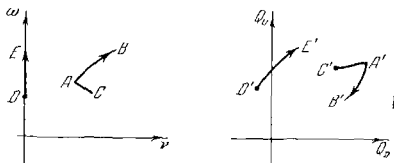


Рис. 39 Отображение плоскости (ν, ω) на плоскость параметров (Q_p, Q_v) .

определенное состояние колебательной системы (точнее, определенная частота и темп возрастания или убывания колебаний). Справа дана плоскость параметров системы (Q_p, Q_v) , каждая точка которой определяет некоторый процесс в зоне теплопровода.

Пусть система (24.21) имеет некоторое решение, например, при $Q_p = Q_p^A$ и $Q_v = Q_v^A$ возникают колебания с $\nu = \nu_A$ и $\omega = \omega_A$. Первой паре чисел соответствует точка A' на плоскости (Q_p, Q_v) , второй паре — точка A на плоскости (ν, ω) . Можно поэтому говорить, что точка A' соответствует точке A и наоборот. Если непрерывно изменять ν и ω , двигаясь, например, вдоль кривой AB на плоскости (ν, ω) , то соответствующая точка в плоскости (Q_p, Q_v) будет тоже смещаться, двигаясь по некоторой кривой $A'B'$. Это позволяет утверждать, что кривая $A'B'$ является отображением кривой AB . В курсах математического анализа доказывается теорема, согласно которой однозначное выражение Q_p и Q_v как функций от ν и ω возможно только

при условии, что функциональный определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial R}{\partial Q_p} & \frac{\partial R}{\partial Q_v} \\ \frac{\partial I}{\partial Q_p} & \frac{\partial I}{\partial Q_v} \end{vmatrix} \quad (24.22)$$

отличен от нуля. При этом оказывается, что знак определителя (24.22) играет важную роль. Пусть, помимо кривой AB , в малой окрестности точки A в плоскости (v, ω) дан еще отрезок AC , который лежит справа от кривой AB , если двигаться от A к B . Отрезку AC в плоскости (Q_p, Q_v) соответствует отрезок $A'C'$. Если $\Delta > 0$, то преобразование (24.21) обладает тем свойством, что отрезок $A'C'$ будет лежать тоже справа от $A'B'$ (движение от A' к B'). Если же $\Delta < 0$, то преобразование (24.21) изменит положение точки C' и она будет ориентирована противоположным C образом: если C лежит справа от AB , то C' будет лежать слева от $A'B'$.

Этим свойством преобразования (24.21) можно воспользоваться следующим образом. Выберем в качестве кривой, изображение которой в плоскости (Q_p, Q_v) ищется, ось ординат в плоскости (v, ω) . При движении от точки D к точке E в плоскости (Q_p, Q_v) будет получен отрезок кривой $D'E'$. Пусть, для определенности, для всех рассматриваемых значений ω $\Delta > 0$. Тогда можно провести такое рассуждение. На линии DE система нейтральна ($v = 0$), следовательно, линия $D'E'$ является границей устойчивости в плоскости параметров (Q_p, Q_v) . Справа от линии DE лежит область $v > 0$ (неустойчивость). Следовательно, справа от $D'E'$ будет лежать область параметров Q_p, Q_v , при которых колебательная система будет неустойчивой. Если бы было $\Delta < 0$, то область неустойчивости лежала бы слева от $D'E'$.

Приведенные здесь соображения позволяют сформулировать такое правило штриховки. Будем, положив в уравнениях (24.21) $v = 0$, изменять ω от $-\infty$ до $+\infty$ ¹⁾ и находить для каждого значения ω соответствующую точку в плоскости параметров (Q_p, Q_v) . Совокупность этих точек

¹⁾ Выше уже говорилось, что для рассматриваемых в настоящей главе уравнений достаточно заменять ω от 0 до $+\infty$

определим кривую, на которой будет задано направление движения (от точек с малыми ω к точкам с большим ω). Условимся штриховать правую сторону этой кривой, если $\Delta > 0$, и левую сторону, если $\Delta < 0$ ¹⁾. Это приведет, в соответствии со сказанным выше, к тому, что окрестность границы устойчивости, соответствующая $\nu > 0$ (неустойчивость), будет заштрихована.

Дальнейшее рассмотрение вопроса о штриховке границ устойчивости и, в частности, случая $\Delta = 0$, удобнее вести не на основе весьма общих равенств (24.21), а пользуясь записью этих равенств для изучаемого случая (24.11). Существенным при этом оказывается то, что величины Q_p и Q_v входят в них линейно. Функциональный определитель (24.22) будет в этом случае равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_{11}(0, \omega) & F_{12}(0, \omega) \\ F_{21}(0, \omega) & F_{22}(0, \omega) \end{vmatrix}, \quad (24.23)$$

т. е. будет совпадать с определителем линейной (относительно Q_p и Q_v) системы (24.11). В тех случаях, когда $\Delta = 0$ и, кроме того, $\Delta_p = 0$ (или $\Delta_v = 0$), уравнения системы (24.11) становятся линейно-зависимыми и, как уже указывалось выше, определяют не точки, а прямые в плоскости (Q_p, Q_v) . Будем называть эти прямые особыми прямыми. Если $\Delta = 0$ при отличных от нуля Δ_p и Δ_v , то это означает, что граница устойчивости в плоскости (Q_p, Q_v) уходит в бесконечность.

Поскольку входящие в (24.23) функции F_{ik} являются непрерывными функциями ω , настолько и Δ является непрерывной функцией ω , и следовательно, можем изменять знак лишь переходя через нуль. Поэтому штриховка кривой, о которой говорилось выше, может изменяться лишь при встрече ее с особой прямой или при уходе ее в бесконечность. Штриховка особых прямых ведется в согласии со штриховкой кривых.

Проиллюстрируем сказанное здесь на примере диаграммы, построенной на рис. 38. Как можно убедиться из формул (24.13), (23.6) и (24.10), особыми прямыми в рассмат-

¹⁾ В теории регулирования обычно штрихуют левую сторону при $\Delta > 0$ и правую при $\Delta < 0$. Здесь принято другое правило, поскольку в настоящей книге штрихуется область неустойчивости,

риваемом случае являются линии $a_{21} = 0$ и $a_{12} = 0$, а для остальных значений ω все точки границы устойчивости ложатся на прямую AB (рис. 40). Численный расчет показывает, что значению $\omega = 0$ соответствует точка A на рис. 40; по мере увеличения ω , изображающая точка движется

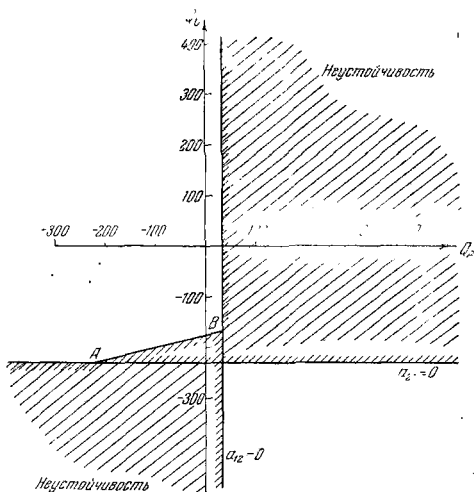


Рис. 40 Диаграмма границ устойчивости, соответствующая случаю, изображенному на рис. 38.

к B и при $h\omega = \pi$ приходит в точку B . Здесь определитель Δ , который был при движении от A к B положительным, обращается в нуль, а при дальнейшем увеличении ω становится отрицательным. Изображающая точка движется при этом от B к A ; после достижения ею точки A она вновь движется к B и т. д. При этом всякий раз, когда точка

движется от A к B , $\Delta > 0$, а при движении от B к A $\Delta < 0$. Очевидно, нижняя часть отрезка AB должна быть заштрихована. В точке A особая прямая $a_{21} = 0$ имеет общую точку с линией AB и в этой точке согласуется штриховка AB и $a_{21} = 0$. Это согласование ясно из чертежа. Особая прямая $a_{12} = 0$ штрихуется в согласии с характером штриховки линии AB в точке B .

В результате получается картина, показанная на рис. 40. Области, внутри которых направлена штриховка, соответствуют неустойчивости. Сравнение диаграмм, приведенных на рис. 38 и 40, показывает их полное совпадение. Таким образом, правило штриховки позволило построить диаграмму областей устойчивости без нахождения линий равных значений v .

Следует сказать, что такая простая конфигурация диаграммы получилась потому, что было задано нужное для этого положение Σ вдоль трубы: $h_1 = h_2$. В общем случае получается значительно более запутанная картина, хотя само по себе построение и штриховка границ устойчивости ведется столь же просто.

§ 25. Анализ условий возбуждения

В предыдущем параграфе был подробно рассмотрен вопрос о конфигурации областей устойчивости и неустойчивости в плоскости параметров колебательной системы Q_p и Q_v . Однако ясно, что умение указать на желательные, или, напротив того, опасные комбинации величин Q_p и Q_v , дает сравнительно мало, если не знать, каким образом эти величины выражаются через привычные для конструктора камеры сгорания (или иного устройства) величины.

Ниже будет дан пример анализа условий возбуждения, основанный на предыдущих результатах, применительно к возбуждению колебаний в системе, состоящей из камер сгорания специфического типа и присоединенных к ней входной и выходной трубы.

Пусть область сгорания σ , которая затем мысленно сводится к поверхности разрыва Σ , обладает следующими свойствами. Перед зоной σ по трубе течет чистый воздух, а внутри области σ расположены форсунки, распыливающие горючее. Горючее мгновенно распределяется по зоне σ

и мгновенно сгорает. Поскольку давление подачи горючего весьма велико, а колебания давления в потоке относительно незначительны, расход горючего через форсунки постоянен и не зависит ни от давления окружающей среды, ни от скорости течения. Эта идеализация должна быть признана довольно грубой, хотя бы потому, что в ней не учитывается время, необходимое на смесеобразование, испарение горючего, время задержки воспламенения и т. д. Влияние подобного запаздывания будет изучено ниже. Что же касается принятой схемы процесса внутри σ , то ее крайняя простота позволяет проанализировать рассматриваемый случай до конца.

Поскольку расход горючего никак не зависит от состояния колебательной системы, и поскольку влияние запаздывания здесь не рассматривается, отличное от нуля возмущение теплоподвода $\bar{Q}$ может возникнуть лишь в результате возмущения полноты сгорания введенного в поток горючего. Опыты говорят о том, что полнота сгорания мало зависит от давления среды, если это давление незначительно отклоняется от нормального. При горении смеси в открытой трубе давление действительно колеблется сравнительно слабо (на доли атмосферы), поэтому будем ниже пренебрегать влиянием давления на полноту сгорания. Скорость течения является более существенным параметром. Нередко увеличение скорости потока после превышения ею некоторой величины приводит к заметному снижению полноты сгорания. В пределе, при значительном увеличении скорости течения может произойти так называемый срыв пламени — полное прекращение горения. Наибольшее влияние на полноту сгорания оказывает обычно коэффициент избытка воздуха α (отношение фактического количества воздуха в единице массы смеси к количеству воздуха, теоретически необходимому для полного сгорания заключенного в ней горючего). Таким образом, примем, что

$$\eta_{\text{сг}} = \eta_{\text{сг}}(v_1, \alpha)$$

и, следовательно,

$$\delta \eta_{\text{сг}} = \frac{\partial \eta_{\text{сг}}}{\partial v_1} \delta v_1 + \frac{\partial \eta_{\text{сг}}}{\partial \alpha} \delta \alpha.$$

Переходя к безразмерной системе переменных (4.8), можно

написать:

$$\bar{\eta}_{\text{сг}} = \frac{\partial \eta_{\text{сг}}}{\partial M_1} \bar{v}_1 + \alpha \frac{\partial \eta_{\text{сг}}}{\partial \alpha} \bar{\alpha} \quad (\alpha = \delta \alpha / \alpha, \quad \eta_{\text{сг}} = \delta \eta_{\text{сг}} / \eta_{\text{сг}}). \quad (25.1)$$

По определению α прямо пропорционально массе воздуха, поступающего в зону горения (так как расход горючего неизменен)

$$\alpha = k Q_1 \tau_1,$$

где k — некоторая постоянная. Очевидно,

$$\bar{\alpha} = Q + \frac{\dot{v}}{M_1}.$$

Как уже говорилось выше, холодное течение можно считать изознтроническим ($s_1 = 0$). Тогда $p_1 = \bar{Q}_1$ (4.9) и формуле для $\bar{\eta}_{\text{сг}}$ можно придать окончательный вид

$$\eta_{\text{сг}} = \left(\eta_M + \frac{\alpha}{M_1} \eta_\alpha \right) v_1 + \alpha \eta_\alpha \bar{\nu}_1. \quad (25.2)$$

где

$$\eta_M = \frac{\partial \eta_{\text{сг}}}{\partial M_1}, \quad \eta_\alpha = \frac{\partial \eta_{\text{сг}}}{\partial \alpha}.$$

Горючее, вводимое непосредственно в зону горения, даст в уравнениях (15.7) член $\bar{Q}^*$. Если на единицу площади сечения потока в зону σ в единицу времени вводится горючее с химической энергией $Q_{\text{хим}}$, которое сгорает со средней полнотой сгорания $\eta_{\text{сг}}$, то $Q^* = \eta_{\text{сг}} Q_{\text{хим}}$. Поэтому с учетом (15.8) имеем

$$\bar{Q}^* = \frac{\delta Q^*}{Q_1 v_1^3} = \frac{\eta_{\text{сг}} Q_{\text{хим}}}{Q_1 v_1^3} \bar{\eta}_{\text{сг}},$$

или, переходя к Q (16.1),

$$\bar{Q} = \bar{B} \eta_{\text{сг}}, \quad (25.3)$$

где

$$B = \frac{2 M_1^2 \eta_{\text{сг}} Q_{\text{хим}}}{Q_1 v_1^3}.$$

Сравнивая формулы (24.2), (25.2) и (25.3), можно утверждать, что в рассматриваемом случае

$$\left. \begin{aligned} Q_p &= Ba\eta_a, \\ Q_v &= B\left(\eta_M + \frac{a}{M_1}\eta_a\right). \end{aligned} \right\} \quad (25.4)$$

Таким образом, величины Q_p и Q_v оказались функциями двух частных производных: полноты сгорания по коэффициенту избытка воздуха a и полноты сгорания по числу M набегавшего на зону горения воздушного потока.

Чтобы рассмотреть влияние этих двух частных производных на процесс возбуждения колебаний, надо предварительно располагать диаграммами устойчивости в плоскости параметров колебательной системы (Q_p , Q_v). Такие диаграммы строились в предыдущем параграфе. Здесь достаточно указать, что в большинстве случаев они имеют вид, аналогичный диаграммам на рис. 36. Такой вид имеет, например, диаграмма устойчивости, построенная для частот, близких к основному тону колебательной системы при равенстве длин холодной и горячей частей течения. Поэтому воспользуемся указанной здесь диаграммой для дальнейшего анализа процесса возбуждения акустических колебаний.

Будем анализировать влияние η_a и η_M на колебательную систему раздельно. Пусть сначала $\eta_a = 0$. Тогда равенства (25.4) дают

$$Q_p = 0; \quad Q_v = B\eta_M.$$

На диаграмме рис. 36 этому отвечает движение изображающей точки по оси ординат, причем Q_v оказывается прямо пропорциональным η_M . Соответствующий график изменения γ приведен в верхней части рис. 37. Как видно из графика (на нем дана шкала η_M), система становится неустойчивой при некотором отрицательном значении Q_v , т. е. при некотором $\eta_M < 0$.

Пусть теперь $\eta_M = 0$. Тогда по равенствам (25.4)

$$Q_p = Ba\eta_a; \quad Q_v = \frac{Ba\eta_a}{M_1}.$$

Отсюда

$$Q_v = \frac{Q_p}{M_1}. \quad (25.5)$$

Таким образом, при изменении η_a изображающая точка движется в плоскости (Q_p, Q_v) по прямой (25.5). Этому соответствуют движение по прямой BB' на диаграмме рис. 36 и график изменения v в нижней части рис. 37.

Началу координат на диаграмме рис. 36 отвечает $\eta_a = 0$, положительным η_a - движение в направлении от B к B' . Это приводит к связи между η_a и v , показанной на рис. 37,

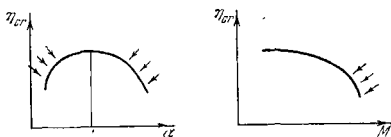


Рис. 41. Области, в которых наиболее вероятно возбуждение системы (помечены стрелками).

из которой можно видеть, что возбуждение системы невозможно только при η_a , близких к нулю. При достаточно больших по абсолютному значению η_a (вне зависимости от знака) колебательная система может быть возбуждена.

Таким образом, колебательная система будет возбуждаться при достаточно больших по абсолютному значению $\eta_M < 0$, $\eta_a < 0$ и $\eta_a > 0$.

Если обратиться к зависимости полноты сгорания от M , и α , то условное протекание соответствующих кривых приведено на рис. 41. Здесь же стрелками указаны области наиболее вероятного возникновения колебаний: $\eta_a > 0$, $\eta_a < 0, \eta_M < 0$. Как видно из приведенных графиков, наиболее вероятно возбуждение колебаний при обогащении смеси до $\alpha < 1$ и при сильном обеднении смеси $\alpha \gg 1$. Следует сказать, что первая из названных возможностей является, по-видимому, более существенной. Это связано с тем, что при обогащении смеси полнота сгорания падает круче, чем при ее обеднении. Кроме того, в области богатых

смесей большее значение имеет и коэффициент B , пропорциональный поступающей в единицу времени в зону горения энергии сгорающего топлива $Q_{\text{хим}}$.

Полученные здесь качественные результаты в целом удовлетворительно согласуются с опытными данными. Насколько можно судить по ряду опытов, вибрационное горение действительно возникает при переобогащении зоны горения и в ряде случаев удается подметить его связь с падением полноты сгорания по мере обогащения смеси.

Влияние связи между полнотой сгорания и числом M поступающего в зону горения потока на возможность возбуждения колебаний нетрудно проанализировать таким же образом, как это было сделано выше. Однако указанный фактор имеет, вероятно, второстепенное значение, поскольку заметное влияние скорости течения на полноту сгорания проявляется, как правило, на режимах, далеких от эксплуатационных. Кроме того, величина $\eta_{\text{в}}$ входит в выражение для Q (25.4) с множителем, равным единице, в то время как $\eta_{\text{а}}$ входит с большим множителем $\left(\frac{\alpha}{M_1}\right)$.

Проведенный здесь анализ имел целью дать простейший пример доведения задачи до величин, которые являются привычными в теории горения и поэтому позволяют лучше ощутить физическую природу процесса возбуждения. В то же время следует иметь в виду, что рассмотренный пример далеко не исчерпывает всей проблемы об условиях возбуждения акустических колебаний горением.

В заключение настоящего параграфа необходимо сделать два замечания. Первое из них сводится к следующему. Выше неоднократно указывалось на ту роль, которую играет обратная связь в изучаемом явлении. Рассмотренный пример позволяет указать на весьма важный механизм обратной связи, заключающийся в том, что вызванные колеблющимся тепловыделением акустические колебания приводят к колебаниям расхода воздуха в зоне расположения форсунок. В связи с этим колеблется коэффициент избытка воздуха, что в свою очередь вызывает колебания полноты сгорания, т. е. тепловыделения.

Второе замечание относится к вопросу о законности принятой в этом параграфе идеализированной схемы процесса в зоне горения. Входящие в формулы (25.4) частные

производные η_v и η_a , строго говоря, нельзя брать из экспериментов, проводимых обычным способом. Дело в том, что когда экспериментатор регистрирует зависимость полноты сгорания от α и M , он проходит ряд стационарных режимов с различными фиксированными значениями этих параметров. Распространять найденные таким образом закономерности (типа представленных на рис. 41) на сугубо нестационарный процесс — вибрационное горение — можно только с известными оговорками и для чисто качественных рассмотрений. По-видимому, статические характеристики в общем правильно передают основную тенденцию — ухудшение полноты сгорания по мере удаления от $\alpha = 1$ ¹⁾.

Если попытаться рассмотреть то новое, что может внести учет нестационарности процесса горения, то в первую очередь возникает естественное стремление учесть неизбежное запаздывание процесса воспламенения горючего. Это запаздывание обусловлено временем, необходимым для испарения и смешения горючего с воздухом, периодом задержки воспламенения и т. д. Учет запаздывания можно осуществить сравнительно просто. Чтобы показать методику этого учета, рассмотрим простой пример.

§ 26. Влияние запаздывания тепловыделения на возбуждение акустических колебаний

В предыдущем параграфе был проанализирован один из возможных случаев возбуждения акустических колебаний горением. Рассмотрение было проведено без учета запаздывания тепловыделения. Можно было бы вернуться к этому случаю и выявить то новое, что дает учет запаздывания. Однако более целесообразным представляется рассмотрение другого примера, такого, где роль, которую может играть задержка воспламенения, проявилась бы наиболее ярко. В качестве подобного примера рассмотрим систему, которая при отсутствии запаздывания, в отличие от описанной выше, вообще не возбуждается.

¹⁾ В камерах сгорания следует различать коэффициент избытка воздуха, подсчитанный для камеры в целом, и местное значение α в зоне горения. Суммарное α бывает нередко выше единицы за счет воздуха, направляемого в обход зоны горения и подмешиваемого к продуктам сгорания ниже зоны интенсивного горения.

Пусть плоскость подвода тепла Σ лежит во входном сечении, т. е. $\bar{l}_1 = 0$. Тогда продукты сгорания займут всю длину трубы, чему будет соответствовать $\bar{l}_2 = 1$ (рис. 42). Краевые условия сформулируем так: на входе и выходе трубы расположены узлы скорости. Такие краевые условия могут рассматриваться, например, в качестве первого приближения к реальным краевым условиям, наблюдаемым в камерах сгорания жидкостных реактивных двигателей.

В нижней части рис. 42 дана схема типичной камеры такого двигателя. Слева, на так называемой головке камеры A , располагаются форсунки, подающие компоненты топлива — горючее и окислитель, а в правой части камеры сгорания помещается сопло Лавалю. Очевидно, что глухая стенка A не позволяет колебаться скорости течения у левого конца цилиндрической части камеры (расход компонентов топлива считаем постоянным). Справа, в критическом сечении сопла Лавалю C всегда сохраняется скорость течения, равная скорости звука. Если отвлечься от возможного колебания самой скорости звука, то можно считать, что в сечении C поддерживается постоянная скорость течения. Когда расстояние от B до C мало, это приводит к тому, что в сечении B скорость течения также становится постоянной. Отсюда возникает формулировка второго краевого условия — отсутствие колебаний скорости в правом концевом сечении (B) цилиндрической части камеры сгорания. Заметим, что близость написанных краевых условий к реальным условиям для камеры сгорания жидкостного реактивного двигателя не означает, что далее будет дан анализ устойчивости рабочего процесса в таком двигателе. Этому будет посвящен ниже специальный раздел книги. Здесь, вероятно, излишне указать, что неустойчивость сгорания в жидкостном реактивном двигателе связана в первую очередь с возмущением расхода массы, а не теплоподвода.

Будем описывать процесс возмущенного теплоподвода в плоскости Σ , совпадающей с сечением A на рис. 42, уравнениями (17.5) с учетом условия $\bar{s}_1 = 0$ и формул (24.1),

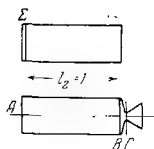


Рис. 42 Идеализированная схема жидкостного реактивного двигателя.

(24.2), т. е. предположим, что в области теплоподвода имеет место только возмущение притока тепла и нет колебаний фронта пламени и т. п. Учтем также, что по краевому условию $\bar{v}_1 = 0$. Тогда условия на плоскости Σ запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_2 &= a_{12}\rho_1 + a_{13}Q_p\bar{p}_1, \\ \rho_2 &= a_{22}\bar{p}_1 + a_{23}Q_p\bar{p}_1, \end{aligned} \right\} \quad (26.1)$$

где a_{12} , a_{13} , a_{22} и a_{23} — некоторые постоянные. Надо сразу оговориться, что эта запись справедлива лишь в том случае, когда изменение процесса горения мгновенно следует за изменением давления $\bar{p}_1$. Если же процесс горения будет отставать от воздействующего на него давления $\bar{p}_1$ на время $\Delta\tau$, то вместо равенств (26.1) надо написать другие. Первые слагаемые в правых частях этих равенств не претерпят изменения, зато вторые, связанные с процессом возмущения теплоподвода, надо будет брать такими, какими они были в момент, отстоящий от рассматриваемого на время $\Delta\tau$. Это можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_2(\tau) &= a_{12}\rho_1(\tau) + a_{13}Q_p\bar{p}_1(\tau - \Delta\tau), \\ \bar{p}_2(\tau) &= a_{22}\bar{p}_1(\tau) + a_{23}Q_p\bar{p}_1(\tau - \Delta\tau). \end{aligned} \right\} \quad (26.2)$$

(Стоящие в скобках величины τ и $\tau - \Delta\tau$ указывают, для какого момента времени берутся переменные.)

Как известно из предыдущего, в принятой постановке задачи изменение всех возмущенных величин происходит пропорционально $e^{\beta\tau}$. Поэтому формулы (26.2) можно переписать в следующем виде ($\bar{v}_{20} = \bar{v}_2$ при $\tau = 0$ и т. д.):

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_{20}e^{\beta\tau} &= a_{12}\bar{p}_{10}e^{\beta\tau} + a_{13}Q_p\bar{p}_{10}e^{\beta(\tau - \Delta\tau)}, \\ \bar{p}_{20}e^{\beta\tau} &= a_{22}\bar{p}_{10}e^{\beta\tau} + a_{23}Q_p\bar{p}_{10}e^{\beta(\tau - \Delta\tau)}. \end{aligned} \right\} \quad (26.3)$$

Отметим, что при β и τ индексы «единица» или «два» не поставлены вовсе. Дело в том, что хотя масштабы времени в холодном и горячем участках течения и различны (так как они зависят от скорости звука) и поэтому следует отличать β_1 от β_2 , а τ_1 от τ_2 , произведение $\beta\tau$ не зависит от избранного масштаба времени, так как

единица времени входит в одном из этих сомножителей в знаменатель, а в другом — в числитель. Сокращая оба равенства (26.3) на $e^{\beta\tau}$, придадим условиям на Σ с учетом запаздывания окончательный вид:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_{20} &= a_{12}\bar{p}_{10} + a_{13}Q_p\bar{p}_{10}e^{-\beta\Delta\tau}, \\ \bar{p}_{20} &= a_{22}\bar{p}_{10} + a_{23}Q_p\bar{p}_{10}e^{-\beta\Delta\tau}. \end{aligned} \right\} \quad (26.4)$$

При записи приведенных равенств уже использовано первое краевое условие ($\bar{v}_1 = 0$). Второе краевое условие $\bar{v}_2 = 0$ при $\xi = l_2 = 1$ даст, на основании первой формулы (4.13).

$$v_{20}q_1(1) + p_{20}q_2(1) = 0.$$

Подставляя в последнее равенство v_{20} и $\bar{p}_{20}$ из (26.4), получим после некоторых упрощений

$$\begin{aligned} (a_{12} + a_{13}Q_p e^{-\beta\Delta\tau}) \left(1 + \exp \frac{2\beta_2}{1 - M_2^2} \right) \\ (a_{22} + a_{23}Q_p e^{-\beta\Delta\tau}) \left(1 - \exp \frac{2\beta_2}{1 - M_2^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (26.5)$$

(В дальнейшем индексе «2» при β будем для простоты опускать.)

Следует подчеркнуть, что условия на Σ в случае учета запаздывания (26.4) в отличие от условий на Σ для случаев, когда задержка во времени не учитывается, становятся зависимыми от комплексной частоты β . Это обстоятельство затрудняет решение характеристического уравнения. В частности, метод, изложенный в § 23, оказывается неприменимым, так как в равенстве (23.5) коэффициенты C_1 , C_2 , C_3 и C_4 становятся функциями комплексной частоты β . В этом случае соотношения (23.7) неверны, поскольку они были получены в предположении вещественности C_1 , C_2 , C_3 и C_4 .

Перепишем (26.5) в виде

$$\begin{aligned} Q_p e^{-\beta\Delta\tau} = - \frac{a_{12} \left(1 - \exp \frac{2\beta}{1 - M_2^2} \right) + a_{22} \left(1 - \exp \frac{2\beta}{1 - M_2^2} \right)}{a_{13} \left(1 + \exp \frac{2\beta}{1 - M_2^2} \right) + a_{23} \left(1 - \exp \frac{2\beta}{1 - M_2^2} \right)} = \\ = A(\beta) + iB(\beta). \end{aligned}$$

где $A(\beta)$ и $B(\beta)$ — вещественные величины. На границе устойчивости $\beta = i\omega$ и тогда написанное равенство разбивается на два, связывающие только вещественные переменные

$$\left. \begin{aligned} Q_p \cos \omega \Delta \tau &= A(\omega), \\ Q_p \sin \omega \Delta \tau &= B(\omega). \end{aligned} \right\} \quad (26.6)$$

Отсюда сразу находим

$$\left. \begin{aligned} \omega \Delta \tau &= \arctg \left[\frac{B(\omega)}{A(\omega)} \right] + k\pi, \\ Q_p &= \frac{A(\omega)}{\cos \omega \Delta \tau}, \end{aligned} \right\} \quad (26.7)$$

где k — целые числа. Задавая различные значения ω , находим по первой формуле $\omega \Delta \tau$, а по второй Q_p . Таким образом, оказывается возможным найти пары значе-

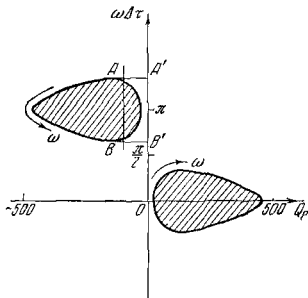


Рис. 43. Диаграмма устойчивости при наличии запаздывания $\Delta \tau$

ний Q_p и $\Delta \tau$, удовлетворяющие условиям существования границы устойчивости.

На рис. 43 даны результаты такого расчета для $M_1 = 0,1$, $M_2 = 0,25$. Как видно из графика ($k = 0$; $k = 1$), неустойчивость возможна лишь для двух типов чередующихся замкнутых областей в плоскости $(Q_p, \omega \Delta \tau)$. Эти области сдвинуты друг относительно друга (по оси $\omega \Delta \tau$)

на угол, равный π , и соответствуют значениям Q_p разных знаков. Существование таких именно типов областей для рассматриваемого случая можно было легко предсказать на основе диаграммы, приведенной в левой части рис. 28. Действительно, полагая $Q_p e^{\omega \Delta \tau} = Q$, сведем рассматриваемый случай к исследованному выше. Соответствующая диаграмма устойчивости типа представленной на рис. 28 дана на рис. 44, где аргумент вектора $\bar{Q}$ в области неустойчивости изменяется от -0 до $+0$ (направления OB и OA). С учетом последнего равенства легко получить, что значениям $Q_p > 0$ области неустойчивости отвечают следующие границы для $\Delta \tau$:

$$-0 < \omega \Delta \tau < 0,$$

а значениям $Q_p < 0$ --

$$\pi - 0 < \omega \Delta \tau < \pi ; 0,$$

что находится в полном соответствии с результатом, показанным на рис. 43.

Хотя результат, представленный на рис. 43, и можно было предвидеть, он был получен здесь путем численного анализа уравнения (26.5) главным образом для того, чтобы проиллюстрировать на простом примере метод решения задачи о возбуждении акустических колебаний теплоподводом с учетом запаздывания процесса возмущенного теплоподвода. В более общих случаях такой простой анализ условий возбуждения при помощи диаграммы типа представленной на рис. 44 затруднителен. Кроме того, не следует забывать, что полученный в настоящем параграфе результат содержит не только сведения о положении границ устойчивости, но и о частотах, соответствующих отдельным точкам этих границ.

Рассмотрим приведенную на рис. 43 диаграмму более подробно, наложив на задачу дополнительные ограничения. Предположим, что по физической сущности процесса теплоподвода Q_p может иметь лишь отрицательные значения, не превосходящие по абсолютной величине 100.

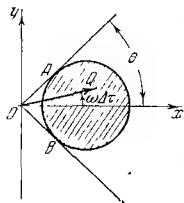


Рис. 44. Влияние запаздывания $\Delta \tau$ на положение вектора $\bar{Q}$ на диаграмме устойчивости.

Тогда возбуждение системы окажется возможным лишь в тех случаях, когда изображающая точка на диаграмме рис. 43 будет лежать в заштрихованной части прямоугольника $AA'B'B'$. Это обстоятельство накладывает специфические ограничения на допустимые значения $\Delta\tau$. Чтобы показать это, построим на рис. 45 связь между $\Delta\tau$ и ω , снимая с диаграммы рис. 43 значения $\omega\Delta\tau$ и ω , соответствующие участку

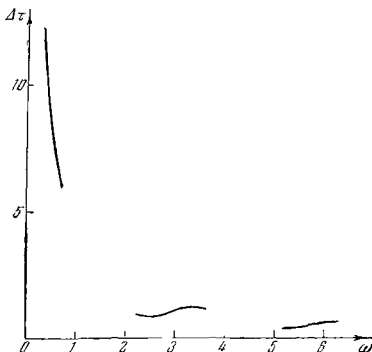


Рис. 45 Связь между частотами колебаний ω и величиной запаздывания $\Delta\tau$.

AB границы устойчивости. Как видно из рис. 45, возбуждение оказывается возможным лишь при определенных частотах ω и требует при этом вполне определенных значений $\Delta\tau$. Важно при этом отметить, что если не рассматривать очень больших ω (они почти всегда нереальны), то система не может возбудиться при $\Delta\tau$, близких к нулю. Это является весьма существенным отличием рассматриваемой задачи от задачи предыдущего параграфа, когда система была способна к возбуждению и при $\Delta\tau=0$. Таким образом, учет запаздывания может оказаться необходимым, и это обстоятельство следует принимать во внимание.

Чтобы закончить рассмотрение вопроса о влиянии $\Delta\tau$ на возбуждение колебаний, сделаем одно замечание. На рис. 45 приведены только минимальные значения $\Delta\tau$, необходимые для возбуждения колебательной системы. Если увеличить $\Delta\tau$ таким образом, чтобы новое значение $\Delta\tau = \Delta\tau'$ было связано с приведенным на рис. 45 $\Delta\tau = \Delta\tau_0$ соотношением $\omega\Delta\tau' = \omega\Delta\tau_0 + 2k\pi$, где k — целое число, то на диаграмме рис. 44 изображающие точки для этих двух случаев, очевидно, совпадут.

Следовательно, при непрерывном изменении $\Delta\tau$ от 0 до ∞ могут периодически чередоваться области значений $\Delta\tau$, для которых система устойчива, с областями значений $\Delta\tau$, для которых система неустойчива.

§ 27. Частоты колебаний

При анализе частот колебаний, возбужденных теплоподводом, следует учитывать, что в этом случае закономерности возбуждения частот не столь просты, как в обычных акустических системах. Выше это обстоятельство уже подчеркивалось в связи с примером решения характеристического уравнения (§ 23). Там, в частности, говорилось, что отклонение частот колебаний от величин, предсказываемых простейшими акустическими формулами, связано с тем, что при пересечении акустической волной поверхности разрыва Σ лишь часть ее проходит в область с иной температурой, а другая часть отражается от поверхности разрыва.

Дело не только в том, что по разные стороны Σ течет газ с различными температурами. Процессы, идущие в зоне горения (т. е. формально — свойства поверхности Σ), самым существенным образом влияют на величины возбуждаемых частот.

Рассмотрим это явление более подробно. Пусть система находится на границе устойчивости и совершает колебания с постоянной амплитудой ($v = 0$). Для определенности предположим, что система имеет узлы давления слева и справа от плоскости подвода тепла Σ , в сечениях с координатами ξ_1 и ξ_2 . Пусть $\bar{p}_1$, $\bar{v}_1$ и $\bar{p}_2$, $\bar{v}_2$ — возмущения давления и скорости на плоскости Σ ($\xi = 0$) слева

и справа соответственно. Тогда исходная система будет иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_1 \varphi_2(\xi_1) - \bar{p}_1 \varphi_1(\xi_1) &= 0, \\ \bar{v}_2 \varphi_2(\xi_2) + \bar{p}_2 \varphi_1(\xi_2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (27.1)$$

Условия на Σ запишем в канонической форме (17.1):

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_2 &= \frac{1}{n} (\bar{v}_1 + \delta E) - \frac{1}{n} (\bar{v}_1 + y_1 \bar{p}_1), \\ \bar{p}_2 &= \frac{1}{m} (p_1 + \delta X) = \frac{1}{m} (p_1 + y_2 \bar{v}_1), \end{aligned} \right\} \quad (27.2)$$

где числа y_1 и y_2 введены (как и выше в аналогичных случаях) для того, чтобы явным образом связать величины δE и δX с фазами и амплитудами колебаний системы. Эти числа являются формальным введением некоторой обратной связи, конкретизация которой здесь не требуется.

Используя (27.2), преобразуем характеристическое уравнение системы (27.1) к следующему виду:

$$\frac{m}{n} y_1 - \frac{\varphi_1(\xi_1)}{\varphi_2(\xi_1)} \frac{\varphi_1(\xi_2)}{\varphi_2(\xi_2)} y_2 = \frac{m}{n} \frac{\varphi_1(\xi_1)}{\varphi_2(\xi_1)} - \frac{\varphi_1(\xi_2)}{\varphi_2(\xi_2)}. \quad (27.3)$$

Отношения функций $\frac{\varphi_1(\xi)}{\varphi_2(\xi)}$, входящие в написанное уравнение, можно определить на основе формулы (22.3). Положив $\beta = i\omega$ (по условию $v = 0$) и обозначив

$$\frac{2\omega\xi}{1-M^2} = \alpha, \quad (27.4)$$

нетрудно получить, что

$$\frac{\varphi_1(\xi)}{\varphi_2(\xi)} = i \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}. \quad (27.5)$$

Проанализируем, основываясь на уравнении (27.3), оба простейших случая возбуждения колебаний — один, характеризуемый условием $\delta X = 0$ ($y_2 = 0$), другой — условием $\delta E = 0$ ($y_1 = 0$). В обоих случаях, как это следует из формулы (27.5), в правой части равенства (27.3) будет стоять мнимая величина, а коэффициенты при y_1 или y_2 в левой части будут вещественными.

Таким образом, нейтральные колебания реализуются при мнимых значениях y_1 и y_2 , что указывает на извест-

ные уже из § 12 и 22 условия возбуждения колебаний, согласно которым сдвиг по фазе между δE и $\bar{p}_1$ (или между δX и $\bar{v}_1$), равный $\frac{\pi}{2}$, соответствует границе устойчивости. Этот результат не зависит, конечно, от величины частоты колебаний.

Рассмотрим, какие частоты могут возбуждаться в изучаемой системе. Изменение величины ω ведет к измене-

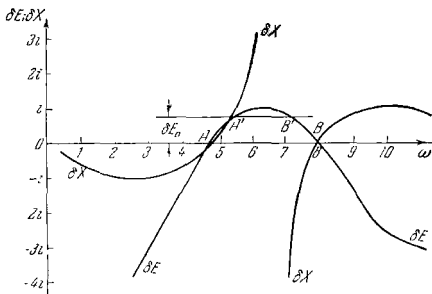


Рис. 46. Определение собственных частот колебательной системы.

нию α (27.4), а следовательно, и функций $\frac{\varphi_1(\xi_1)}{\varphi_2(\xi_1)}$ и $\frac{\varphi_1(\xi_2)}{\varphi_2(\xi_2)}$ (27.5). Таким образом, каждому значению ω соответствует свое значение y_1 (или y_2), при котором возможны нейтральные колебания системы с заданной частотой ω ; оно элементарно определяется из уравнения (27.3).

Чтобы проиллюстрировать сказанное, на рис. 46 приведены результаты подобного вычисления. Для большей наглядности используются не значения y_1 и y_2 , а $\delta E - y_1 \bar{p}_1$ и $\delta X - y_2 \bar{v}_1$ (при этом p_1 и $\bar{v}_1$ считались вещественными и положительными). Расчет произведен для случая трубы с узлами давления в концевых сечениях и с плоскостью Σ , расположенной на равных расстояниях от обоих концов. Скорость течения в «холодной» части характеризуется

числом $M = 0,15$, а относительный подогрев $T_{02}/T_{01} = 6,25$ (здесь T_0 означает температуру полностью заторможенного газа). В расчетах величина $\bar{v}$ в «холодном» концевом сечении была условно принята равной единице.

Важнейший вывод, который следует из уравнения (27.3), сводится к тому, что при должном изменении δE или δX можно получить любую наперед заданную частоту (этот факт был уже использован в § 24 для построения границ устойчивости, где определялось изменение Q_r и Q_i при непрерывном изменении ω). В отличие от обычных задач акустики частота колебаний определяется здесь не только свойствами колеблющегося газа и размерами трубы, но и характером процесса теплоподвода на Σ . Поэтому такие понятия как «основной тон колебаний» или «обертоны» следует употреблять с осторожностью. Эти привычные понятия имеют смысл для наперед заданных фиксированных значений δE и δX . Действительно, например, при $\delta E = \delta X = 0$ из всех частот, приведенных на рис. 46, могут реализоваться только частоты, соответствующие точкам A и B . Частота $\omega = 4,82$ (точка A) может рассматриваться как первая гармоника, частота $\omega = 7,95$ (точка B) как вторая и т. д. (другие гармоники на рис. 46 не приведены). При другом характере процесса на Σ , например $\delta E = \delta E_0$, те же гармоники будут соответствовать точкам A' и B' . При непрерывном изменении δE возможен непрерывный переход от первой гармоники ко второй.

Здесь рассматривались элементарные случаи возбуждения колебаний, при которых δE или δX равно нулю. Однако полученные выводы не изменяются и в общем случае, когда между δE и δX существуют произвольные соотношения. В этом легко убедиться на основании анализа уравнения (27.3).

§ 28. Ступенчатое изменение частот колебаний с изменением положения зоны горения

Экспериментаторам хорошо известно о существовании связи между положением зоны горения (длиной «горячей» части трубы) и частотами колебаний. Известно, например, что при распространении пламени в трубе, заполненной горючей смесью, возбуждаемые пламенем частоты скачко-

образно меняются по мере перемещения фронта пламени вдоль трубы. Это свойство легко поддается анализу на основе характеристического уравнения рассматриваемой задачи. Замечательным является при этом то обстоятельство, что подобное скачкообразное изменение частот никак не связано с конкретным видом процесса горения; оно может не наблюдаться лишь тогда, когда механизм возбуждения является функцией положения зоны горения вдоль оси трубы или функцией частоты колебаний. Рассмотрим это явление более подробно.

В качестве красивых условий выберем узлы давления или скорости в сечениях $\xi = \xi_1$ слева от поверхности подвода тепла и $\xi = \xi_2$ справа от нее. Таким образом,

$$\bar{p} = 0 \quad \text{или} \quad \bar{v} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = \xi_1 \quad \text{и} \quad \xi = \xi_2. \quad (28.1)$$

При использовании краевых условий вида (28.1) можно в решении не учитывать волн энтропии, п, если дополнительно условиться, что $\bar{s}_1 = 0$ и формулы связи между $\bar{v}_1$, $\bar{p}_1$ и $\bar{v}_2$, $\bar{p}_2$ на Σ не содержат ни комплексной частоты колебаний β , ни расположения плоскости Σ по оси трубы, то величины ξ и β будут входить в характеристическое уравнение только через функции φ_1 и φ_2 .

При этих предположениях два краевых условия (28.1) дадут два уравнения, связывающие, например, $\bar{p}_1$ и $\bar{v}_1$ в плоскости Σ [подобно тому как это получилось в § 23 при составлении характеристического уравнения (23.4)], причем множители при $\bar{p}_1$ и $\bar{v}_1$ будут линейными функциями φ_1 и φ_2 . Это даст в конечном итоге характеристическое уравнение вида

$$\left| \begin{array}{cc} a_{11}\varphi_1(\xi_1) + a_{12}\varphi_2(\xi_1) & a_{21}\varphi_1(\xi_1) + a_{22}\varphi_2(\xi_1) \\ a_{31}\varphi_1(\xi_2) + a_{32}\varphi_2(\xi_2) & a_{41}\varphi_1(\xi_2) + a_{42}\varphi_2(\xi_2) \end{array} \right| = 0. \quad (28.2)$$

где вещественные коэффициенты a_{ik} будут функциями свойств поверхности Σ . Вещественность коэффициентов предполагает запись условий на Σ по типу формул § 23.

Если учесть, что функции φ_1 и φ_2 линейно зависят от двух выражений, содержащих ξ и β (4.14)

$$\exp\left(\frac{-\beta\xi}{M+1}\right); \quad \exp\frac{\beta\xi}{1-M},$$

то, вынося за знак определителя в первой строчке величину $\exp \frac{\beta_1 \xi_1}{M_1 + 1}$, а во второй — величину $\exp \left(\frac{-\beta_2 \xi_2}{M_2 + 1} \right)$ и сократив на них, получим характеристическое уравнение, зависящее от выражений

$$\exp \frac{-2\beta_1 \xi_1}{1 - M_1^2} : \exp \frac{2\beta_2 \xi_2}{1 - M_2^2}.$$

Как известно, величины β_1 и β_2 связаны соотношением (22.5), а если начало отсчета ξ совместить с Σ (рис. 22), то ξ_1 и ξ_2 удовлетворяют равенству

$$\xi_2 - \xi_1 = 1.$$

С учетом сказанного характеристическому уравнению (28.2) может быть придан следующий вид:

$$F \left(\exp \frac{2\beta_1 (1 - \xi_2)}{1 - M_1^2} ; \exp \frac{2\beta_1 \xi_2}{1 - M_1^2} \right) = 0 \quad (28.3)$$

Здесь F — целая рациональная функция второй степени с вещественными коэффициентами.

Проанализируем решение этого уравнения. Оно дает изменение β_1 в функции относительной длины «горячего» участка ξ_2 , которую будем ниже обозначать l_2 , при заданных неизменных краевых условиях вида (28.1) и условиях на Σ указанного выше типа. Пусть по мере увеличения l_2 величина декремента затухания колебаний ν будет увеличиваться, переходя через нуль. Это будет соответствовать переходу от устойчивости ($\nu < 0$) к неустойчивости ($\nu > 0$). На границе устойчивости $\nu = 0$ и $\beta = i\omega$ ¹⁾. Выберем пару значений l_2 и ω , соответствующих границе устойчивости, и обозначим их $l_2^{(1)}$ и $\omega^{(1)}$. Имея эти две величины, легко определить все множество значений пар чисел l_2 , ω , соответствующих всем гармоникам системы в момент перехода через границу устойчивости при увеличении l_2 .

¹⁾ Индекс «единица» у ω далее опускается.

Действительно, при $\beta = i\omega$ равенство (28.3) становится равенством, связывающим тригонометрические величины

$$F \left[\cos \frac{2\omega(1-l_2)}{1-M_1^2} + i \sin \frac{2\omega(1-l_2)}{1-M_1^2} ; \right. \\ \left. \cos \frac{2\omega l_2}{n(1-M_2^2)} + i \sin \frac{2\omega l_2}{n(1-M_2^2)} \right] = 0. \quad (28.4)$$

По условию оно удовлетворяется при $l_2 = l_2^{(1)}$ и $\omega = \omega^{(1)}$. Но тогда оно будет удовлетворяться так же при всех значениях ω и l_2 , для которых справедливы равенства:

$$\left. \begin{aligned} \frac{2\omega(1-l_2)}{1-M_1^2} - 2K\pi &= \frac{2\omega^{(1)}(1-l_2^{(1)})}{1-M_1^2}, \\ \frac{2\omega l_2}{n(1-M_2^2)} - 2N\pi &= \frac{2\omega^{(1)}l_2^{(1)}}{n(1-M_2^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (28.5)$$

Здесь K и N — любые целые числа, ограниченные естественными условиями $\omega > 0$ и $0 \leq l_2 \leq 1$.

Следует лишь добавить, что знаки у вторых слагаемых надо брать одинаковыми — либо в обоих случаях плюс, либо в обоих случаях минус. В первом случае в левой части равенства (28.4) сохранится то же комплексное число, что и соответствующее $l_2^{(1)}$ и $\omega^{(1)}$, во втором появится сопряженное комплексное число. Поскольку в правой части равенства (28.4) стоит нуль, это требует равенства нулю вещественной и мнимой частей числа, стоящего слева. Однако абсолютные величины как вещественной, так и мнимой части сопряженных комплексных чисел совпадают. (Это обстоятельство и позволяет писать в равенствах (28.5) два знака.)

Решив систему (28.5), находим:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \pi [(1-M_1^2)K + n(1-M_2^2)N] + \omega^{(1)}, \\ l_2 &= \frac{\pi n(1-M_2^2)N \pm \omega^{(1)}l_2^{(1)}}{\omega}. \end{aligned} \right\} \quad (28.6)$$

Может оказаться, что величины $\omega^{(1)}/l_2^{(1)}$ и $\omega^{(1)}$ велики, и для отыскания всех возможных комбинаций $0 \leq l_2 \leq 1$ и $\omega > 0$, соответствующих границам устойчивости, окажется необходимым брать отрицательные значения целых чисел N и K . Чтобы избежать этого, и иметь в дальнейшем лишь положительные или равные нулю N и K , можно

применить такой прием. Запишем N и K в виде $K = -K' \mp K''$ и $N = N' \mp N''$, где числа K' , K'' , N' , N'' — целые неотрицательные. Тогда формулы (28.6) примут следующий вид:

$$\omega = \pi [(1 - M_1^2) K' - n(1 - M_2^2) N'] \pm \omega_*^{(1)},$$

$$l_2 = \frac{\pi n(1 - M_1^2) N' \pm \omega_*^{(1)} l_{2*}^{(1)}}{\omega}.$$

Здесь

$$\omega_*^{(1)} = \omega^{(1)} - \pi [(1 - M_1^2) K'' + n(1 - M_2^2) N''],$$

$$\omega_*^{(1)} l_{2*}^{(1)} = \omega^{(1)} l_2^{(1)} - \pi n(1 - M_2^2) N''.$$

Числа K'' и N'' надо выбрать так, чтобы

$$0 < \omega_*^{(1)} < \pi(1 - M_1^2); \quad 0 < \omega_*^{(1)} l_{2*}^{(1)} < \pi n(1 - M_2^2),$$

тогда K' и N' не смогут быть отрицательными, так как в противном случае ω и l_2 стали бы принимать отрицательные значения, что противоречит условиям, принятым выше.

В дальнейшем будем (кроме мест, оговоренных особо) предполагать, что в формулах (28.6) уже произведены соответствующие пересчеты, т. е. $\omega^{(1)}$ и $\omega^{(1)} l_2^{(1)}$ имеют минимально возможные значения. Иногда определенные таким формальным методом величины $\omega^{(1)}$ и $l_2^{(1)}$ не имеют физического смысла ($\omega^{(1)}$ получается очень близким к нулю, а $l_2^{(1)} > 1$). Этим не следует смущаться, так как подобный результат говорит лишь о том, что реально эти режимы (соответствующие $K \rightarrow 0$) наблюдаться не будут.

Рассмотрим сначала те решения, которые получаются при использовании знаков плюс в формулах (28.6). Тогда, задаваясь различными значениями K и N , можно получить все границы устойчивости того же типа, что и исходная граница устойчивости, соответствующая $\omega^{(1)}$ и $l_2^{(1)}$. Это следует понимать в том смысле, что если, например, с увеличением l_2 процесс из устойчивого стал неустойчивым, то и все другие границы устойчивости ω ; l_2 , полученные на основе равенств (28.6), будут соответствовать переходу от устойчивости к неустойчивости по мере увеличения l_2 .

Использование знаков минус в (28.6) приведет к получению границ устойчивости противоположного по сравнению с исходной границей типа. Тогда, например, если с увеличением l_2 при переходе через $l_2^{(1)}$ процесс из устойчивого становится неустойчивым, то все границы, полученные из равенств (28.6) при отрицательных знаках у $\omega^{(1)}/l_2^{(1)}$ и $\omega^{(1)}$, будут соответствовать переходу от неустойчивости к устойчивости по мере увеличения l_2 .

Указанное здесь свойство границ устойчивости легко доказать. Для этого достаточно сделать предположение, что при непрерывном изменении l_2 комплексная частота β для всех гармоник также изменяется непрерывно (при этом отбрасывается неинтересный случай, когда при всех l_2 $\nu = 0$). Предположение это вполне естественно, поскольку свойства поверхности Σ были приняты неизменными. Но тогда очевидно, что при непрерывном изменении l_2 следящий за одной и той же гармоникой наблюдатель будет отмечать, вообще говоря, многократные переходы через границы устойчивости, в моменты, когда будут удовлетворяться равенства (28.5). Важно при этом отметить, что точки (l_2, ω) , соответствующие границам устойчивости, полученные при использовании знаков «плюс» и «минус» в формулах (28.6), будут чередоваться. Это видно, например, из второго равенства (28.5), если заметить, что второе слагаемое правой части по абсолютному значению меньше 2π по определению. Действительно, второе уравнение (28.5) дает в плоскости $(l_2; \omega)$ непересекающиеся гиперболы, которые, чередуясь, принадлежат двум семействам гипербол, получающихся при использовании знаков «плюс» и «минус» в указанном уравнении. Пересекая кривую $\omega = \omega(l_2)$, принадлежащую некоторой гармонике системы, эти гиперболы определяют точки, соответствующие $\nu = 0$, которые, чередуясь, будут принадлежать то одному, то другому семейству гипербол.

Выше было сделано предположение о непрерывном изменении β в функции l_2 . Тогда, при монотонном изменении l_2 , колебательная система, пересекая границы устойчивости, будет попеременно становиться то устойчивой, то неустойчивой (здесь не рассматривается вопрос о возможности реализации таких колебательных систем, у которых две точки, соответствующие соседним границам устойчи-

вости, будут стягиваться в одну точку). Следовательно, переходя через границы, соответствующие одному семейству гипербол, колебательная система будет всегда становиться, например, из устойчивой — неустойчивой, а пересекая границы, соответствующие другому семейству гипербол, из неустойчивой — устойчивой. Это утверждение и подлежало доказательству.

Приведенные рассуждения можно сделать более наглядными, если дать графическую интерпретацию формулам

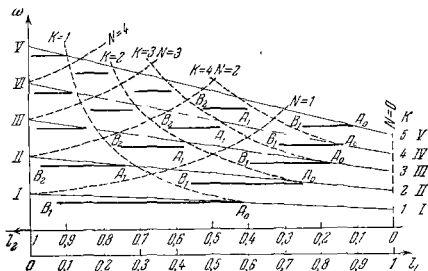


Рис. 47. К построению диаграммы зависимости возбуждаемых частот от положения Σ по длине трубы.

(28.6). Обратимся с этой целью к рис. 47, на котором для некоторого численного примера построены линии равных K и равных N в предположении, что $\omega^{(1)} = 0$. Кроме того, здесь же нанесены зависимости ω от l_2 для разных гармоник (номера гармоник помечены при них римскими цифрами), в предположении, что справедливо простейшее акустическое правило для трубы с открытыми концами: период колебаний равен времени двукратного пробега акустическим импульсом всей трубы (без учета взаимодействия с зоной теплопровода), т. е. что частота

$$\omega = \frac{\pi}{\frac{1-l_2}{1-M_-^2} + \frac{l_2}{n(1-M_+^2)}}.$$

Задавшись затем некоторыми отличными от нуля значениями $\omega^{(1)}$ и $\omega^{(1)} l_2^{(1)}$, получаем границы устойчивости при использовании обоих знаков в формулах (28.6). Точки, соответствующие границам устойчивости, условно соединены прямыми, которыми отмечены области неустойчивости. При этом точки A_0 соответствуют границам устойчивости, полученным для $N=0$, A_1 и B_1 для $N=1$ и т. д. Точки A соответствуют использованию знаков минус, точки B — знаков плюс в формулах (28.6). Как видно из

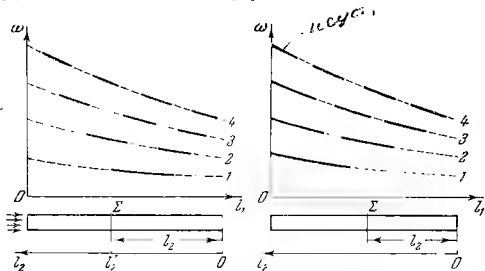


Рис. 48. Связь между положением Σ по длине трубы и возбуждаемыми частотами колебаний.

чертежа, внутри каждого криволинейного четырехугольника, образованного линиями равных K и N , лежит одна область неустойчивости.

Основываясь на сказанном, легко построить диаграммы, дающие наглядное представление о распределении областей устойчивого и неустойчивого протекания процесса сгорания при перемещении зоны горения вдоль оси течения. Подобное построение дано на рис. 48 для двух типов краевых условий: трубы с открытыми концами и трубы с одним закрытым концом. Отложенные по оси абсцисс значения l_2 дают положение зоны горения, по оси ординат отложены частоты колебаний ω . Собственные частоты системы даны пунктирными линиями, около которых поставлены номера гармоник. Области неустойчивости показаны

сплошными линиями. Для того чтобы показать различные возможные типы распределения областей неустойчивости, на правой диаграмме приведен случай, когда основной тон имеет только одну, а не две границы устойчивости. Такой случай вполне вероятен для трубы с одним закрытым концом.

Общие закономерности, которые бросаются в глаза при рассмотрении диаграмм, приведенных на рис. 48, могут быть сведены к двум положениям.

Во-первых, чем выше номер гармоники, тем большее число чередующихся областей устойчивости и неустойчивости помещается на длине трубы (при этом первая гармоника имеет одну область неустойчивости, вторая — две, третья — три и т. д.). Во-вторых, видно, что одновременно могут быть неустойчивыми несколько гармоник, причем при положении фронты пламени у открытого конца все гармоники устойчивы (хотя для высоких гармоник области неустойчивости и подходят сколь угодно близко к открытому концу).

При обсуждении этих диаграмм следует помнить, что они получены в предположении отсутствия излучения энергии из открытых концов (узлы давления в качестве краевых условий). Известно, однако, что с увеличением частоты колебаний количество энергии, излучаемой из трубы в окружающее пространство, резко возрастает (более подробно этот вопрос будет рассмотрен в следующей главе). Учет рассеивания энергии при взаимодействии акустических волн с концами трубы приведет к тому, что области неустойчивости по мере увеличения частоты колебаний начнут сужаться, и начиная с некоторой частоты совершенно исчезнут. Следовательно, высокие гармоники практически наблюдаться не будут и при положении фронты пламени в некоторой, достаточно большой, окрестности открытого конца трубы процесс будет всегда устойчив.

В итоге можно предсказать следующий общий характер протекания процесса. По мере удаления зоны горения от открытого конца первоначально стабильный процесс должен стать неустойчивым, причем частота колебаний будет скачкообразно понижаться до основного тона системы. Это приведет к, казалось бы, парадоксальному поведению колебательной системы: увеличение относительной длины

участка трубы, заполненного горячим газом, будет приводить к уменьшению частоты колебаний, в то время как все гармоники должны были бы увеличивать свойственные им частоты. Объяснение этому легко усматривается из диаграммы на рис. 48: хотя частоты каждой гармоники и увеличиваются с возрастанием l_2 , по мере этого возрастания становятся неустойчивыми все более и более низкие гармоники, которые, рассеивая меньше энергии во внешнее пространство, будут возбуждаться легче, чем высокие гармоники, и смогут подавлять последние. Лишь при очень больших величинах l_2 , когда оба конца трубы открыты, появляется большая вероятность вторичного возбуждения высоких гармоник. Вся совокупность имеющихся опытных данных подтверждает этот вывод.

Полученные в настоящем параграфе на основе формального анализа характеристического уравнения соотношения (28.6) имеют простой физический смысл. Если считать, что при известных условиях основной тон колебательной системы стал неустойчивым, т. е. к неустойчивости привела, например, известная комбинация величин $\bar{p}$, $\bar{v}$, Q^* и U_1 , то легко сообразить, что, в предположении неизменности процесса в зоне горения, точно такие же условия ($\bar{p}$, $\bar{v}$, Q^* и U_1) встретятся дважды на второй гармонике, трижды на третьей и т. д. Это связано с тем, что вторая гармоника как бы повторяет дважды стоячую волну колебаний основного тона, третья — трижды и т. д. Те же рассуждения справедливы и для моментов перехода от неустойчивости к устойчивости.

§ 29. Эксперименты по влиянию положения зоны горения на процесс колебаний

Целый ряд результатов, найденных в настоящей главе, подтверждается многочисленными экспериментами. Особенно поучительны в этом смысле опыты, связанные с изучением влияния положения зоны горения по длине трубы на процесс возбуждения акустических колебаний. Некоторые из полученных при этом выводов могут иметь не только теоретическое, но и практическое значение.

При обработке опытных данных целесообразно несколько упростить формулы (28.6). Поскольку все описываемые

ниже опыты велись при сравнительно малых значениях M_1 (порядка 0,05—0,1), то разности $1 - M^2$ могут быть приняты равными единице. Кроме того, формулы (28.6) целесообразно записать в размерных переменных (частоты в герцах, а длины в метрах), чтобы непосредственно сравнивать их с опытными точками. С учетом всех этих замечаний, соотношения, связывающие частоты колебаний и длины холодной и горячей части течения, приобретают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= (K + nN) \frac{a_1}{2L} - \Omega^{(1)}, \\ L_2 &= \frac{\frac{na_1}{2} N \pm \Omega^{(1)} L_2^{(1)}}{\Omega} \end{aligned} \right\} \quad (29.1)$$

Здесь L и L_2 — общая длина и длина горячей части течения, a_1 — скорость звука в холодной части течения, Ω — частота колебаний в герцах, $\Omega^{(1)}$ и $L_2^{(1)}$ — частота колебаний на границе устойчивости и соответствующая длина горячей части течения.

Полученная формула исключительно проста и не содержит величин, характеризующих детали процесса горения, численная оценка которых затруднительна. Все они заключены в экспериментально определяемых значениях $\Omega^{(1)}$ и $L_2^{(1)}$. Остальные величины (n , a_1 , L , L_2 и Ω) также измеряются совершенно просто.

В тех случаях, когда (как это часто бывает в эксперименте) наблюдается лишь одна «лесенка» частот, например только области неустойчивости $A_0 B_1$ на рис. 47, формулы (29.1) допускают дальнейшее упрощение. Поскольку все точки A_0 на рис. 47 получаются при $N = 0$, а точки B_1 при $N = 1$, т. е. для постоянных N (которые полностью определены заданием хотя бы одной точки A_0 и B_1), то формулы (29.1) можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \frac{a_1}{2L} K + \Omega^{(1)}, \\ L_2 &= \frac{L_2^{(1)} \Omega^{(1)}}{\Omega}, \end{aligned} \right\} \quad (29.2)$$

где $\Omega^{(1)}$ и соответственно $L_2^{(1)}$ уже включают слагаемые, зависящие от N . Пользование этими формулами край-

не просто. Найдя экспериментально $\Omega^{(1)}$ и $L_2^{(1)}$ для какой-либо точки A_0 , сразу получаем всю серию одноименных точек. Для построения серии точек B_1 надо подставить в выражения (29.2) $\Omega^{(1)}$ и $L_2^{(1)}$, соответствующие какой-либо точке B_1 и т. д. Если для таких расчетов будут братья наименьшие наблюдавшиеся частоты $\Omega^{(1)}$, то числа K будут для всех других гармоник положительными.

Известным преимуществом формул (29.2) является, помимо всего прочего, то, что они не содержат такой величины, как $n = \frac{a_2}{a_1}$, измерение которой связано с некоторыми трудностями и данные по которой не всегда приводятся экспериментаторами.

Сравнение экспериментальных данных с теорией целесообразно начать с рассмотрения опытов Коварда, Хартвелла и Джорджсона, о которых уже говорилось в вводной

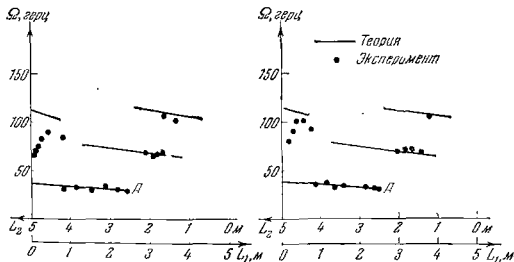


Рис. 49. Связь между положением фронта пламени и возбужденными частотами по опытам Коварда, Хартвелла и Джорджсона.

главе. Опыты заключались в изучении вибрационного горения, возникавшего при медленном распространении пламени в трубе, закрытой с одного конца, и заполненной горючей смесью, при поджигании смеси у открытого конца. В этих опытах величина L_2 равна расстоянию от открытого конца трубы до фронта пламени. Схема установки и результаты эксперимента приведены на рис. 49 и рис. 50.

Опыты ставились на двух трубах, несколько отличавшихся длиной и имевших разные диаметры (100 и 200 мм), поэтому на каждом из рисунков приведено по две диаграммы. Разница между рис. 49 и рис. 50 заключается в методике их получения. Теоретические области неустойчивости, приведенные на рис. 49 (сплошные линии дают теоретически найденные области неустойчивости, а точки — экспериментальные данные), были получены следующим образом. Из эксперимента бралось положение в плоскости

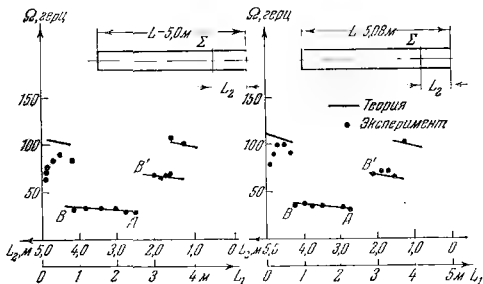


Рис. 50. Связь между положением фронта пламени и возбужденными частотами по опытам Коварда, Хартвелла и Джорджсона.

($L_2; \Omega$) одной точки А, после чего с использованием формул (29.1) находились все другие точки, соответствующие границам устойчивости обоих типов. Эти точки соединялись прямыми, которые условно дают изменение Ω в зависимости от L_2 внутри области неустойчивости. Фактическое определение частот колебаний для точек, лежащих внутри области неустойчивости (т. е. таких, для которых $\nu > 0$), не производилось, поэтому здесь говорится об условном характере изменения Ω в зависимости от L_2 внутри области неустойчивости. На диаграмме не изображены области неустойчивости, теоретически существующие, но не наблюдавшиеся экспериментально. Все они соответствуют более высоким частотам, чем изображенные на диа-

грамме, и поэтому практического интереса не представляют. Выше уже говорилось, что возбуждение этих колебаний маловероятно.

На рис. 50 области неустойчивости построены также путем использования формул (29.1), но на этот раз только со знаком плюс. Для того чтобы компенсировать потерю половины границ устойчивости при таком расчете, в учет принималась не одна исходная точка A , а две (A и B), принадлежащие границам устойчивости противоположных типов. В остальном построение диаграмм на рис. 50 ничем не отличалось от построения, описанного выше.

Сравнение теоретически найденных областей неустойчивости с наблюдавшимися экспериментально падо признать весьма удовлетворительным, особенно для тех областей, которые приведены на рис. 50. Единственным исключением являются точки, соответствующие L_2 , близким к нулю (т. е. положениям фронта пламени в непосредственной близости от закрытого конца трубы). Это связано с особенностями механизма самовозбуждения и будет объяснено в § 49.

Если сравнить между собою характер совпадения экспериментальных данных с теоретическими областями неустойчивости на рис. 49 и рис. 50, можно сделать следующий вывод. Лучшее совпадение теории с экспериментом на рис. 50 связано с тем, что серия границ одного типа получена путем использования точки A , а серия границ противоположного типа путем использования точки B , в то время как на рис. 49 обе серии границ найдены с помощью точки A . Физически это означает, что характеры возмущенного процесса горения в момент наступления неустойчивости и в момент ее исчезновения не вполне одинаковы. Если бы они совпадали, то зоны неустойчивости распределялись бы, как показано на рис. 49, сплошными линиями. Причина этого различия станет понятной в § 49.

Более важным, чем возможная разница свойств поверхности Σ в процессе перехода через границу устойчивости при возникновении и при исчезновении неустойчивости является хорошее совпадение теоретических и экспериментальных областей неустойчивости. Это говорит об одинаковом механизме возбуждения, действующем вне

зависимости от помера гармоник, и удовлетворяющем условиям, выдвинутом в начале предыдущего параграфа. Там, в частности, делалось предположение, что свойства поверхности теплопровода Σ не зависят от частоты. Это предположение включает, конечно, допущение об отсутствии запаздывания, так как введение времени запаздывания в той или иной форме привело бы, как показано выше, к зависимости свойств плоскости Σ от частоты [см., например, формулу (26.4)].

В рассматриваемом эксперименте происходило сгорание заранее подготовленной смеси газообразного горючего и воздуха, причем смесь сгорала в трубе, в которой не располагалось никаких устройств для поддержания процесса горения (форсунки, стабилизаторы и т. п.). При таком характере горения в уравнениях, описывающих свойства поверхности Σ (16.15), естественно положить $\bar{Q}^* = 0$ и $\bar{P}_x^* = 0$, т. е. считать, что возбуждение колебаний происходит только вследствие отличия от нуля возмущения эффективной скорости распространения пламени $\bar{U}_1$. Но тогда, по аналогии с формулой (24.2), можно будет написать

$$\bar{U}_1 = U_v \bar{v}_1 + U_p p_1, \quad (29.3)$$

т. е. предположить зависимость $\bar{U}_1$ от возмущений давления и скорости. Коэффициенты a_{11} , a_{12} , a_{21} и a_{22} в формулах (23.2) станут в этом случае линейными функциями U_v и U_p , и, следовательно, такими же свойствами будут обладать коэффициенты C_1 , C_2 , C_3 и C_4 в выражениях (23.7).

Подставив в (23.7) для $v=0$ экспериментально найденное (например, для точки А) значение ω и значения h_1 и h_2 , известные для той же точки А (поскольку они однозначно определяются заданием относительной длины горячей части трубы), можно рассматривать систему (23.7) как линейную неоднородную систему для определения U_v и U_p . Фактическое вычисление U_v и U_p позволит установить относительную амплитуду возмущения эффективной скорости распространения пламени и ее фазу относительно возмущений $\bar{v}_1$ и p_1 . Вычисления подобного рода могут дать полезные сведения о процессе, идущем

в зоне горения, в момент наступления (или исчезновения) неустойчивости. Здесь эти расчеты не приводятся, поскольку они не имеют непосредственного отношения к содержанию настоящего параграфа.

Рассмотренные эксперименты были произведены в неподвижной смеси горючих газов, при свободном распространении в ней фронта пламени. Однако и при изменении условий опыта найденные закономерности сохраняются. Обратимся с этой целью к опытам, поставленным при сжигании заранее подготовленной смеси паров бензина с воздухом, движущейся по цилиндрической трубе. В указанных опытах была сделана попытка возбудить возможно большее число гармоник, чтобы наиболее полно сравнить теоретические зависимости с экспериментом. Это в известной мере удалось — если в описанной выше работе Коварда, Хартвелла и Джорджсона возбуждались три гармоники, то здесь было возбуждено семь гармоник.

Экспериментальная установка представляла собою открытую с двух концов трубу длиной в 4,57 м с диаметром в 100 мм. Эта труба свободно обдувалась подогретым потоком бензо-воздушной смеси, которая непрерывно готовилась в специальном ресивере, отделенном от входного сечения трубы свободным промежутком. Это было сделано для того, чтобы получить четкие краевые условия на обоих концах трубы: как входное, так и выходное ее сечения сообщались с окружающим пространством. Специально произведенными замерами было показано, что акустические колебания в трубе не передавались в ресивер, т. е. разрыв между выходным соплом, которым кончался ресивер, и входом в трубу был достаточно велик. Горение в трубе происходило за группой из нескольких стабилизаторов пламени (выполненных в виде конусов), расположенных в одной и той же плоскости, нормальной к оси трубы. Суммарная площадь проекций стабилизаторов на эту плоскость была мала по сравнению с площадью сечения трубы, т. е. стабилизаторы не загромождали сечения, и акустические волны свободно проходили его, не испытывая заметных отражений от корпусов стабилизаторов.

Опыт заключался в том, что группа стабилизаторов, которая могла как целое перемещаться по трубе, посте-

ленно сдвигалась по ней и через каждые 50 мм смещения производилась регистрация частоты колебаний.

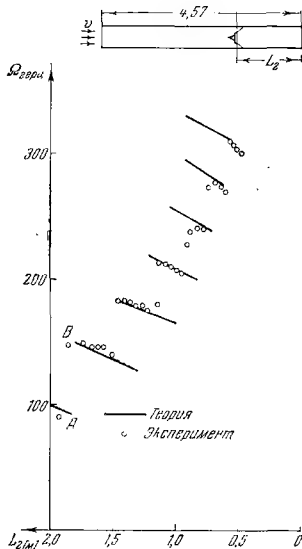


Рис. 51. Связь между положением стабилизатора пламени по длине трубы и возбужденными частотами.

Результаты эксперимента приведены на рис. 51. Теоретические области неустойчивости построены по простейшим формулам (29.2) с использованием экспериментально найденных координат концов областей неустойчивости *A* и *B*. Взаимное расположение теоретических и экспериментальных областей неустойчивости вновь

подтверждает справедливость соотношений, полученных в предыдущем параграфе. При этом следует особо подчеркнуть, что обе группы опытов, которые здесь рассматривались, были поставлены с различными краевыми условиями (закрытый и открытый конец трубы в одних опытах и два открытых конца в других), различным характером движения газа (неподвижный относительно стенок газ в холодной части трубы и поток горючей смеси) и различной организацией горения (свободный фронт пламени и горение за плохо обтекаемыми стабилизаторами). Это указывает на большую универсальность полученных теоретических соотношений. Надо сказать, что это подтверждается также многими другими опытами, например уже упоминавшимися экспериментальными исследованиями Путнэма и Денниса¹⁾ и других авторов.

Вернемся к диаграмме на рис. 51 и рассмотрим ее с несколько иной точки зрения. Наряду с хорошим, для такого сложного явления, совпадением теоретических и экспериментально полученных областей неустойчивости, нетрудно заметить некоторое систематическое смещение их друг относительно друга. Это говорит о том, что свойства зоны теплоподвода не вполне совпадают с теми, которые были постулированы в начале предыдущего параграфа. По-видимому, в рассматриваемом случае свойства зоны Σ в некоторой степени зависят от частоты колебаний, поскольку расхождение между теоретическими областями неустойчивости и экспериментальными точками систематически связано с изменением частоты колебаний. Этот результат надо признать естественным. В гл. VII будет показано, что при сжигании заранее подготовленной смеси за плохо обтекаемыми стабилизаторами пламени механизм возбуждения и поддержания колебаний существенным образом связан с процессом срыва вихрей со стабилизаторов. Из гидромеханики известно, что этот процесс может «подстраиваться» к частоте колебания скорости газа, обтекающего стабилизатор. Однако трудно предположить, что на этот процесс не окажут влияния другие свойства вихреобразования.

¹⁾ Путнэм и Деннис, Исследование вибрационного горения в горелках. Вопросы ракетной техники, № 5 (23), 1954.

Можно было бы тем же методом, на который было указано несколько выше, найти в этих опытах изменение U_v и U_p по мере изменения частот колебаний, и получить таким образом более глубокое представление о свойствах зоны теплопровода. Однако такой анализ не входит в задачи настоящего параграфа.

Заметим, наконец, что на рис. 51 приведены лишь те области неустойчивости, которые соответствуют снижающую частот колебаний по мере увеличения длины горячей части. В то же время из левой диаграммы рис. 48

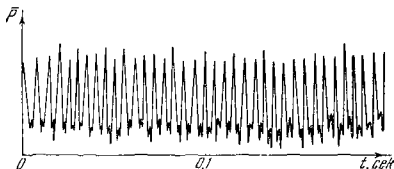


Рис. 52. Осциллограмма колебания давления при вибрационном горении. Пример одновременного возбуждения двух частот.

следует, что при двух открытых концах трубы в процессе дальнейшего увеличения длины горячей части частоты колебаний должны вновь перескакивать на более высокие гармоники. Хотя в экспериментах подобное явление наблюдается сравнительно редко (так как при этом должна существовать короткая холодная и относительно длинная горячая часть течения), его удавалось зарегистрировать в установках, подобных той, которая использовалась для описанных здесь экспериментов.

Приведенные на рис. 48, 49, 50 и 51 области неустойчивости расположены таким образом, что при некоторых относительных длинах горячей части течения становятся неустойчивыми сразу несколько гармоник. Это приводит к тому, что иногда возбуждаются сразу две, а то и три гармоники. Явление это наблюдается довольно часто и становится из рассмотрения упомянутых здесь диаграмм вполне понятным. На рис. 52 дан пример осциллограммы

колебаний давления, снятой при вибрационном горении; на осциллограмме хорошо видно наложение двух гармоник — основной и имеющей вдвое большую частоту. Иногда осциллограммы приобретают еще более сложный вид и их расшифровка требует применения специальных методов. Однако обычно основная частота может быть выделена сразу и нередко на сопутствующие ей частоты просто не обращают внимания.

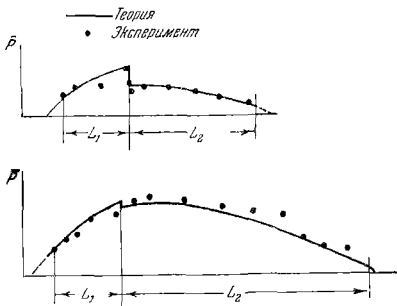


Рис. 53. Сравнение теоретических и экспериментальных элюр стоячих волн давления.

В конце предыдущего параграфа говорилось, что физической основой наблюдающегося скачкообразного изменения частот колебаний является способность колебательной системы как бы повторять форму стоячей волны дважды при возбуждении второй гармоники, трижды — третьей и т. д. С этой точки зрения совпадение теоретической картины скачкообразного изменения частот колебаний с опытом косвенно свидетельствует о том, что и формы стоячих волн близки к теоретическим. Этот факт можно зарегистрировать непосредственно, путем измерения формы стоячей волны при возбужденных в системе колебаниях. Проще всего это сделать для стоячей волны давления. На рис. 53 приведены два примера сравнения

теоретических и экспериментальных эиюр абсолютных значений амплитуд стоячей волны давления. Как видно из диаграмм, опытные точки достаточно хорошо следуют за теоретической зависимостью. Скачкообразное изменение теоретической эиюры в средней части диаграммы соответствует плоскости сплошного разрыва Σ , которая представляет в идеализированном виде зону горения.

Если анализ процесса скачкообразного изменения частот колебаний при изменении длины горячей части трубы (и неизменной длине трубы в целом) представляет скорее физический интерес, то реальный практический интерес имеет родственное явление, которое внешне проявляется в известном смысле противоположным образом. Речь идет о свойстве колебательной системы стремиться к сохранению постоянного значения размерной частоты колебаний при неизменной длине горячей части и значительном увеличении общей длины трубы.

Пусть длина горячей части трубы L_2 остается постоянной, а общая ее длина L непрерывно увеличивается. При этом относительная длина горячей части L_2/L будет уменьшаться, т. е. если вернуться к предыдущим диаграммам, движение будет идти не справа налево, а слева направо. Следовательно, та точка, которая соответствовала исчезновению неустойчивости, будет теперь соответствовать ее возникновению и наоборот.

В соответствии с формулами (29.1) можно написать

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \frac{a_1}{2L} (K + nN) \pm \Omega^{1/2}, \\ \Omega &= \frac{\frac{na_1}{2} N \pm \Omega^{1/2} L_2^{1/2}}{L_2} \end{aligned} \right\} \quad (29.4)$$

Положим в этих формулах $N = \text{const}$, т. е. будем рассматривать родственные точки (например, все левые или все правые концы отрезков на рис. 51).

Пусть теперь, как уже говорилось выше, размерная длина горячей части течения будет постоянна ($L_2 = \text{const}$). Тогда в правой части второго равенства (29.4) окажутся только постоянные величины. Следовательно, по мере изменения общей длины трубы L , но при сохранении

длины горячей части $L_2 = \text{const}$, колебательная система будет стремиться сохранить частоту колебаний Ω неизменной при всяком новом возникновении неустойчивости.

Если обратиться теперь к первой формуле (29.4), то сразу видно, что это стремление колебательной системы может быть удовлетворено лишь за счет K , т. е. за счет перехода к возбуждению более высоких гармоник по мере увеличения общей длины трубы L .

Чтобы сделать эти выводы более наглядными, обратимся к примеру расчета. Найдем, пользуясь формулами

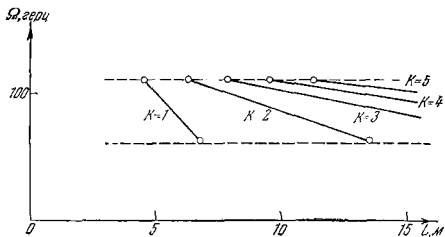


Рис. 54. Связь между возбуждаемыми частотами и длиной трубы при постоянной длине горячей части трубы.

(29.4), при $N=1$ моменты возникновения неустойчивости, а положив $N=0$, сменив знаки при $\Omega^{(1)}$ на обратные и изменив абсолютную величину $\Omega^{(1)}$ должным образом, моменты исчезновения неустойчивости. Результаты расчета построим в виде графика $\Omega = \Omega(L)$, причем точки начала и конца неустойчивости условно соединим прямыми, чтобы отметить области неустойчивости. Соответствующее построение приведено на рис. 54, причем около областей неустойчивости написано, каким K они соответствуют. Пример построен для численных значений параметров, совпадающих с теми, которые были характерны для эксперимента, представленного на рис. 51. Приведенная на рис. 54 диаграмма показывает, что в системе, независимо от длины трубы L , можно ожидать появления колебаний только с частотами, лежащими в пределах 61—110 герц.

По мере увеличения общей длины трубы L частота колебаний в начале начинает снижаться, например, для области неустойчивости, соответствующей $K=1$, со 110 герц до 61 герц, что вполне соответствует ожидаемому поведению системы, так как увеличение L увеличивает время пробега звукового импульса вдоль трубы.

Однако в дальнейшем не только не продолжается снижение Ω , но, наоборот, частота скачкообразно повышается вновь до 110 герц, поскольку неустойчивой стала следующая гармоника, соответствующая $K=2$. При этом

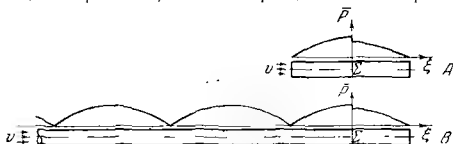


Рис. 55. Эпюры стоячих волн в трубах с одинаковой длиной горячей части течения.

в некоторой области значений L могут одновременно существовать частоты порядка 105—110 герц и 61—72 герца для лежащих друг над другом участков $K=2$ и $K=1$.

Описанное явление наблюдалось в специальном эксперименте. Свободно обдуваемая воздушным потоком труба имела телескопическое устройство, которое позволяло непрерывно наращивать длину входного участка, не изменяя режима обдува входного сечения. В концевой части трубы располагалась зона горения. После возбуждения вибрационного горения производилось медленное увеличение длины холодной части трубы и велось непрерывное наблюдение за изменением частот колебаний. Частоты колебаний первоначально имели тенденцию к снижению, но затем скачкообразно повышались до исходного значения.

Физические процессы, лежащие в основе явления, довольно просты. Пусть, например, существует некоторая труба с приблизительно одинаковыми длинами холодной и горячей части, и в ней возбуждены колебания основного тона. На рис. 55, А схематически показана эта труба

и здесь же построена эюра амплитуд колебаний давления в ней. Предположим, что возбужденная частота и связанные с ней эюры колебаний δp и δv реализуют такие условия в зоне горения, которые в наибольшей мере способствуют возбуждению системы. Тогда, по мере увеличения общей длины трубы, сохранение процессов в зоне горения неизменными (в частности, сохранение и конфигураций эюр амплитуд колебаний δp и δv) возможно только путем сохранения размерной частоты колебаний (на чертеже — расстояний между узлами на эюре), т. е. перехода к более высоким гармоникам. В нижней части рис. 55 приведена соответствующая схема трубы с удлиненной холодной частью.

Таким образом, возбуждаемая системой частота колебаний в известном смысле определяется длиной и свойствами горячей части трубы, т. е. камеры сгорания. Сделанный вывод согласуется со всем имеющимся экспериментальным материалом.

Нужно заметить, что этот вывод имеет большое практическое значение. Дело в том, что при исследовании камер сгорания возникает вопрос о возможности испытаний их изолированно от двигателя, путем присоединения к воздухопроводу, нередко имеющему очень большую длину. Казалось бы, при этом нарушается всякое подобие акустических условий работы и поэтому изучать на такой установке процессы вибрационного горения испытываемой камеры нельзя. Однако анализ явления, который был проведен выше, показывает, что это простое рассуждение является неточным и если камера сгорания склонна к неустойчивости (вибрационному горению), то эта неустойчивость проявится (причем в тех же формах, без изменения частоты колебаний и т. п.) и на установке с длинным входным воздухопроводом.

Полученный результат не следует истолковывать в том смысле, что колебательная система вообще нечувствительна к изменению длины холодной части трубы. По сути, здесь было показано только то, что если вместо некоторой длины холодной части трубы L_1 взять другую, L_1^* , то при условии, что новая длина будет во много раз больше исходной ($L_1^* \gg L_1$), процесс колебаний будет характеризоваться стремлением к сохранению как частоты, так и всех

ных своих свойств. Это позволяет вести испытания камер сгорания на стендах, характеризующихся очень длинными воздухоподводящими трубопроводами, не слишком рискуя иметь акустические условия в зоне горения, резко отличные от натурных. Однако из этого вовсе не следует, что при изменении длины L_1 все свойства колебательной системы сохраняются. Чтобы показать это, рассмотрим такой пример. Пусть область неустойчивости мала и в нормальных условиях система не возбуждается.

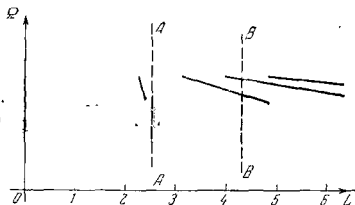


Рис. 56. Влияние длины трубы на устойчивость течения.

Начнем увеличивать длину холодной части трубы L_1 , сохраняя все размеры горячей части постоянными. Тогда диаграмма распределения областей устойчивости, аналогичная приведенной на рис. 54, может иметь вид, показанный на рис. 56. Пусть исходная полная длина трубы будет, например, $L=2,5$ м (линия AA на рис. 56). Это соответствует отсутствию колебаний, поскольку линия AA не пересекает областей неустойчивости (изображенных на диаграмме сплошными линиями). Удлиним теперь входной участок трубы, сохраняя размеры зоны горения и участка трубы, по которому текут продукты сгорания, неизменными. При $L>3,1$ м любая длина L будет соответствовать какой-либо области неустойчивости (линия BB на рис. 56), т. е. при достаточно большом удлинении входного участка трубы, первоначально стабильный процесс может стать неустойчивым. Правда, это предполагает, что система в целом склонна к возбуждению, т. е. обладает

областями неустойчивости. Таким образом, если система способна возбудиться, то эта способность особенно легко реализуется по мере удлинения входного участка течения.

Этот результат тоже представляет значительный практический интерес. Он говорит, что если камера сгорания доведена на стенде с длинным трубопроводом и не даст на нем вибрационных режимов горения, то возникновение их при переходе к более коротким входным участкам маловероятно. И в то же время, если камера сгорания доведена при малой длине входного участка, то простое удлинение его способно привести к вибрационному горению.

Сказанное можно подтвердить следующим экспериментом. Для опытов была использована камера сгорания со входным участком течения, имевшим длину 700 мм. Изменяя подачу горючего, удавалось получать коэффициенты избытка воздуха от $\alpha = 1$ до $\alpha = 3$. Во время опыта регистрировались амплитуды колебаний давления перед зоной горения δp . Эти амплитуды относились к избыточному (по отношению ко внешней среде) давлению полностью заторможенного потока воздуха перед камерой сгорания q . Относительные величины возмущений давления $\frac{\delta p}{q}$ строились в функции коэффициента избытка воздуха α . На нормальных, «спокойных» режимах горения $\frac{\delta p}{q}$ не превышало величин порядка 0,1—0,15. На рис. 57 даны экспериментально полученные зависимости $\frac{\delta p}{q} = f(\alpha)$ для трех случаев: кривая *a* соответствует исходному варианту установки, с длиной входного участка $L_1 = 700$ мм; кривая *b* — длине входного участка 1400 мм; кривая *c* — длине входного участка 2800 мм. Как видно из эксперимента, первоначально стабильный процесс сгорания становился вибрационным (с увеличением амплитуд колебаний в 5—10 раз) от одного только увеличения длины холодной части течения L_1 , как это и следует из развитой теории.

Надо, правда, добавить, что рассуждения, на основе которых были получены приведенные выше выводы, исходили из предположения, что все области неустой-

чивости характеризуются совершенно одинаковыми механизмами возбуждения и гашения колебаний. Это, конечно, не всегда имеет место, особенно если колебательная система способна возбудиться при помощи разных физических процессов, реализующих обратную связь (подробнее о них см. гл. VII). Все же подтверждение многих

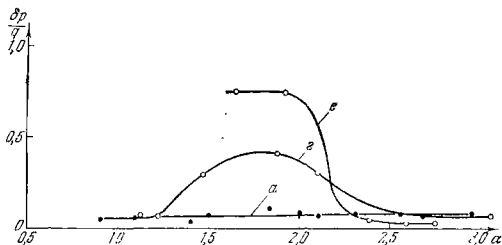


Рис 57. Влияние длины входного участка течения на склонность системы к возбуждению.

следствий из развитой простейшей теории указывает на то, что ею можно пользоваться как теорией первого приближения.

В заключение настоящего параграфа полезно привести некоторые дополнительные данные по акустике стендовых установок, не относящиеся непосредственно к вопросу о влиянии относительных длин горячей и холодной частей течения на области неустойчивости.

Хотя испытания камеры сгорания на длинном подводящем воздухопроводе дают известную гарантию того, что при переходе к более коротким входным участкам склонность колебательной системы к возбуждению скорее уменьшится, чем увеличится, иногда может представить интерес испытание камеры сгорания с коротким входным участком, на который не влияет подводящий воздухопровод. В этом случае мыслимы две схемы, которые акустически разделяют входной участок камеры сгорания и стендовый воздухопровод (рис. 58).

Первая из этих двух схем сводится к созданию ресивера перед входным сечением канала, ведущего к камере сгорания, а вторая — к разрыву трубопровода в пужном месте (она применима лишь при ограниченных давлениях внутри трубопровода).

Рассмотрим первую из названных схем. Интуитивно ясно, что если сечение ресивера S_2 будет много больше, чем сечение трубы S_1 , то ресивер фактически станет своеобразной «внешней средой», а в месте стыка образуется узел давления. Труба с камерой сгорания будет как бы отделена от всех подводящих воздух магистралей. Обычно сечение S_2 не может быть сделано очень большим и поэтому представляет интерес численная оценка влияния отношения S_2/S_1 на степень приближения условия на стыке труб разных диаметров к узлу давления.

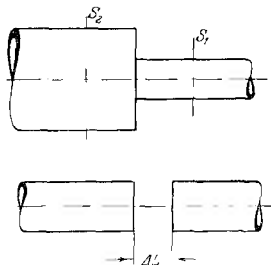


Рис. 58. Две схемы разделения ступового воздухопровода и входного участка камеры сгорания.

В книге Алдреева и Русакова¹⁾ приводится такое выражение для отношения амплитуды, прошедшей через стык труб волны давления, к амплитуде подошедшей волны:

$$\eta = \frac{2}{1 + \frac{S_2}{S_1}}.$$

Очевидно, что коэффициент η характеризует степень приближения рассматриваемого изменения сечения к полностью открытому концу. При этом $\eta = 0$ указывает на отсутствие проходящей волны (полное отражение), а $\eta = 1$ на то,

¹⁾ Андреев И. И. и Русаков И. Г., Акустика движущейся среды. ГТТИ, 1934.

что волна полностью проходит. Таким образом, уменьшение η означает приближение к условию открытого конца. В специально поставленном эксперименте цилиндрическая труба диаметром 100 мм, в которой происходило вибрационное горение, подсоединялась к ресиверам с диа-

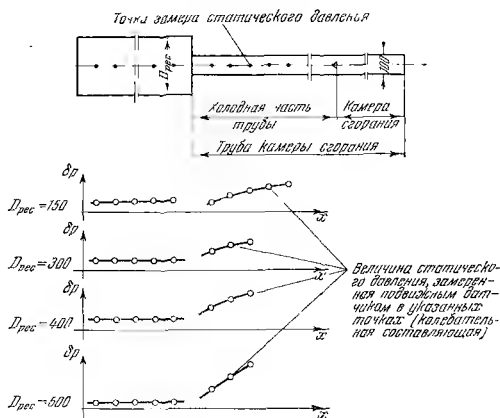


Рис. 59. Эпюры амплитуд колебания давления на стыке ресивера и начального участка трубы камеры сгорания.

метрами 150, 300, 400 и 500 мм. По длине ресивера и трубы в окрестностях их стыка производилось измерение амплитуд колебания давления. Соответствующие эпюры и общая схема установки даны на рис. 59.

Из приведенных графиков видно, что по мере увеличения отношения S_2/S_1 условия на стенке труб все более приближаются к условиям, характерным для открытого конца. Даже такое небольшое увеличение диаметра при переходе к ресиверу, как переход от 100 мм к 150 мм, дает четкую эпюру стоячей волны в трубе. С увеличе-

нием S_2 амплитуды колебаний в ресивере, как и следовало ожидать, уменьшаются. По-видимому, достаточно полное разделение ресивера и трубы получается при $S_2/S_1 \geq 3$.

Вторая схема также изучалась экспериментально. Разрыв трубопровода имел ту же цель - сформировать колебания с узлом давления в месте разрыва. Схема

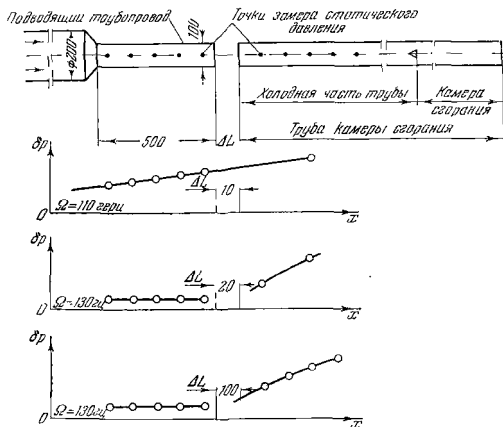


Рис. 60. Эпюры амплитуд колебаний давления в окрестности разрыва трубопровода.

опытной установки и распределение амплитуд колебаний при вибрационном горении, измеренных в окрестности разрыва, даны на рис. 60. Так же, как и в предыдущих опытах, в трубе диаметром 100 мм возбуждалось вибрационное горение. При разрыве $\Delta L = 10$ мм колебания передавались через разрыв так, будто он не существует. При этом частота колебаний (110 герц) оказалась в полном соответствии с суммарной длиной обеих частей трубы,

разделенных разрывом. При разрывах в 20 мм и 100 мм картина резко менялась. Эпюра колебаний давления явно стремилась к нулю в месте разрыва, а в левой части трубы наблюдались колебания постоянной, но малой амплитуды. При этом частота колебаний повысилась до 130 герц и стала соответствовать длине правой части трубы, без участка, лежащего по другую сторону разрыва. Это говорит о том, что для получения должного эффекта разрыв между трубами должен быть порядка 20% от диаметра труб или больше.

Можно, конечно, комбинировать обе приведенные схемы, делая подводящую трубу большего диаметра, чем труба, в которой происходит горение, и одновременно сохраняя разрыв.

Полученный экспериментальный результат хорошо согласуется с опытами Коварда, Хартвелла и Джордж сопа, описанными в § 1. Приближение в указанных опытах пластины к открытому концу трубы (диаметр ее был тоже 100 мм) практически не сказывалось на характере колебаний при расстояниях между пластиной и трубой, равных 60 мм и 30 мм. При расстояниях 15 мм и меньше характер вибрационного горения изменялся весьма резко (см. рис. 4). Таким образом, и здесь удаление пластины на расстояние, превышающее 20% диаметра, практически разрывало связь между колебаниями газа в трубе и подводимым к устью трубы препятствием.

ГЛАВА VI

ВОЗБУЖДЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ТЕПЛОПРОВОДОМ ПРИ НАЛИЧИИ ПОТЕРЬ НА КОНЦАХ ТРУБЫ

§ 30. Потери на излучение

В настоящей главе рассматривается та же задача, что и в предыдущей, опускается лишь предположение об отсутствии потерь акустической энергии. Потери, которые сопутствуют акустическим колебаниям, можно условно разбить на две группы: потери внутренние, связанные с силами вязкости и теплопроводности, действующими внутри трубы, и внешние потери, связанные с излучением колебательной энергии во внешнюю среду. Здесь будет рассмотрен лишь второй из этих типов потерь, причем в наиболее простой форме.

Излучение акустической энергии из конца трубы связано с наличием отличного от нуля потока акустической энергии, движущегося из трубы во внешнее пространство. Из выражения для потока акустической энергии через какое-либо сечение (11.6) видно, что вопрос о величине и знаке потока A связан с амплитудами δp и δv и фазовым сдвигом между ними. Для определения этих величин в акустике вводят понятие импеданса. Его можно формально определять как комплексный множитель, связывающий δp и δv . Здесь удобнее сразу ввести безразмерный импеданс z , связывающий $\bar{p}$ и $\bar{v}$,

$$\bar{p} = z\bar{v}. \quad (30.1)$$

Поскольку в разных сечениях стоячей волны p и v различны, то и импеданс z будет различным в зависимости от того, где выбрано сечение. Обычно наибольший интерес представляют импедансы концевых сечений, поскольку

излучение энергии во внешнюю среду происходит, естественно, через концевые сечения.

Чтобы выявить физический смысл вещественного и мнимого слагаемых импеданса

$$z = r + ix, \quad (30.2)$$

обратимся к переменным u , w .

Введем по аналогии с акустическим импедансом z величину ξ , связывающую u и w . С этой целью удобно рассматривать u и w в качестве комплексных чисел. Величину ξ определим равенством

$$w = \xi u, \quad (30.3)$$

откуда сразу следует, что

$$|\xi| = \frac{|w|}{|u|}. \quad (30.4)$$

Вследствие того, что при установившихся колебаниях абсолютные величины u и w между поверхностями разрыва Σ не зависят от координаты ξ , величина $|\xi|$ будет обладать тем же свойством. Это выгодно отличает ξ от импеданса z , и свойство независимости $|\xi|$ от ξ будет использовано ниже, в гл. VIII.

Найдем величину ξ . Воспользовавшись равенствами (4.9), (30.1) и (30.4), легко убедиться, что

$$\xi = \frac{1 - z}{1 + z}. \quad (30.5)$$

С учетом (30.2) получим:

$$|\xi|^2 = \frac{(1 - r)^2 + x^2}{(1 + r)^2 + x^2}. \quad (30.6)$$

Равенства (11.7) и (30.4) позволяют написать следующую формулу для потока акустической энергии A (здесь и ниже u и w вновь рассматриваются как векторы):

$$A = \frac{1}{8\rho_0 a} (1 - |\xi|^2) u^2. \quad (30.7)$$

Так как все величины, входящие в эту формулу, положительны, то знак A будет всецело зависеть от разности $1 - |\xi|^2$. Следовательно, знак потока акустической энер-

гии целиком определяется модулем ξ . При $|\xi| > 1$ поток акустической энергии отрицателен, т. е. направлен против течения, при $|\xi| < 1$ — положителен (направлен по течению).

Модуль ξ зависит от величин вещественной и мнимой части акустического импеданса z . Из акустики известно, что вещественная часть импеданса r определяет активное сопротивление акустической системы, а мнимая часть x — реактивное сопротивление. Потери, очевидно, связаны с активным сопротивлением. Это ясно, в частности, из формулы (30.6), которая показывает, что отличие модуля ξ от единицы связано с величиной безразмерного коэффициента активного сопротивления r . При $r = 0$ $|\xi| = 1$ и акустическое излучение энергии из конца трубы, как это следует из формулы (30.7), отсутствует. При $r > 0$ $|\xi| < 1$, при $r < 0$ $|\xi| > 1$, т. е. разным знакам r соответствуют противоположные направления движения потока акустической энергии. Следует всегда помнить, что импедансы z_1 и z_2 , соответствующие разным концам трубы, имеют разные знаки действительных частей. Импеданс z_2 , соответствующий сечению, через которое истекают горячие газы, имеет положительные r (излучение идет в положительном направлении оси ξ), импеданс z_1 — отрицательные. В соответствии с этим $|\xi_2| < 1$, т. е. поток акустической энергии у выходного сечения движется по течению, из трубы в окружающее пространство, а $|\xi_1| > 1$, т. е. поток акустической энергии у входа в трубу движется против течения, следовательно, тоже из трубы в окружающее пространство. Это говорит о том, что акустическая энергия рассеивается из обоих концов трубы.

При решении задачи с учетом потерь акустической энергии в окружающем трубу пространстве будут использоваться оба способа учета этих потерь: при помощи импеданса z и при помощи коэффициента ξ . Выбор того или другого способа будет определяться характером рассматриваемой задачи.

В заключение следует привести формулы, позволяющие производить фактическое определение импедансов. При избранной выше системе безразмерных переменных оба слагаемых безразмерного импеданса z (30.2) совпадают с принятыми в акустике. Можно, например, воспользо-

ваться приближенными формулами, предложенными Гутиным¹⁾:

$$r = \frac{k^2 d^2}{16}, \quad x = \frac{k d}{\pi},$$

где d — диаметр трубы, k — волновое число (отношение частоты к скорости звука).

Для дальнейшего использования этим величинам удобнее придать несколько иной вид. Представив волновое число в виде

$$k = \frac{\omega}{L},$$

получим для z выражение

$$z = \left(\frac{d}{4L} \right)^2 \omega^2 + i \frac{d}{\pi L} \omega. \quad (30.8)$$

Величины импеданса z , полученные по формуле (30.8), можно применять лишь при достаточно малых значениях $\frac{d}{L} \omega$. Произведенная оценка показывает, что для рассматриваемых в настоящей книге «длинных» труб и для первых гармоник условие малости $\frac{d}{L} \omega$ всегда выполняется.

В тесной связи с вопросом об излучении акустической энергии в окружающее пространство находится вопрос о так называемом «эффекте открытого конца».

Обычно краевое условие у открытого конца записывается либо в виде равенства (30.1), либо, при менее строгом рассмотрении, в виде $p = 0$. В последнем случае делается предположение, что в конечном сечении открытого конца трубы колебаний давления не происходит. Это предположение использовалось еще Лагранжем, Эйлером и Бернулли, однако работы акустиков XIX столетия показали, что его можно применять только с известными оговорками.

¹⁾ Фурдуй В. В., Электроакустика, Гостехиздат, 1948, стр. 111. Следует заметить, что приведенные формулы получены для покоящейся среды. Влиянием скорости течения на коцевые импедансы здесь и далее пренебрегается. Поэтому получаемые ниже результаты справедливы для достаточно медленных течений. В остальных случаях их можно считать правильными лишь качественно.

Теоретическое решение задачи об отражении акустического импульса от открытого конца трубы усложняется тем, что плоская волна, движущаяся по трубе, становится сферической (лучше сказать, перестает быть одномерной) вне трубы. Однако для ряда конкретных схем теоретические решения были получены и, кроме того, были поставлены соответствующие опыты. Обзор этих исследований дан, в частности, Рэлеем¹⁾. Не приводя здесь подробных выкладок, укажем лишь на два обстоятельства, которые следует учитывать при написании краевых условий для открытых концов трубы.

Во-первых, колебательный процесс у открытого конца всегда вызывает рассеивание акустической энергии в окружающем пространстве. При этом указанное рассеивание связано не с переходом акустической энергии в тепло, а с передачей механической (акустической) энергии внешним по отношению к трубе массам окружающей среды. Это явление и учитывалось, по сути, формулами, приведенными в настоящем параграфе.

Во-вторых, если даже пренебречь рассеиванием энергии, то эффект инерции среды перед устьем трубы сводится к кажущемуся удлинению трубы. Возбуждаемые в трубе частоты несколько ниже тех, которые были бы получены в случае реализации идеальной схемы. Поэтому для учета этого явления принято несколько увеличивать в расчетах длину трубы, чтобы получить лучшее соответствие с опытом. Рэлей рекомендует увеличивать расчетный размер трубы на величину порядка 0,3 диаметра трубы для открытого конца.

Ниже, при проведении всех расчетов, будет предполагаться, что эта поправка уже внесена и вопрос об «эффекте открытого конца» больше обсуждаться не будет.

§ 31. Характеристическое уравнение задачи при учете потерь на концах трубы

В предыдущей главе было найдено характеристическое уравнение задачи при отсутствии потерь на концах трубы. Здесь будет рассмотрен более общий случай.

¹⁾ Стретт Дж. В. (лорд Рэлей). Теория звука, том II, гл. XVI, Гостехиздат, М., 1955.

Пусть на плоскости Σ (рис. 22) в сечении $\xi = 0$ слева безразмерные возмущения давления и скорости равны соответственно $\bar{p}_0$ и $\bar{v}_0$, а справа — $\bar{p}'_0$ и $\bar{v}'_0$. Связь между этими возмущениями устанавливается свойствами поверхности Σ . Поступим далее точно так же, как это было сделано в § 23. Предполагая некоторую заданную связь между $\delta E'$, $\delta X'$ и $\bar{v}_0$, $\bar{p}_0$ и используя равенства (17.5), получим такую форму записи условий на Σ :

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}'_0 &= a_{11}\bar{v}_0 + a_{12}\bar{p}_0, \\ \bar{p}'_0 &= a_{21}\bar{v}_0 + a_{22}\bar{p}_0. \end{aligned} \right\} \quad (31.1)$$

Выразим $\bar{p}$ и $\bar{v}$ на концах трубы (при $\xi = \xi_1$ и $\xi = \xi_2$) через $\bar{v}_0$, $\bar{p}_0$ и $\bar{v}'_0$, $\bar{p}'_0$ при помощи формул (4.13) и применим краевые условия

$$\left. \begin{aligned} \bar{p} &= z_1\bar{v} \quad \text{при} \quad \xi = \xi_1, \\ \bar{p} &= z_2\bar{v} \quad \text{при} \quad \xi = \xi_2. \end{aligned} \right\} \quad (31.2)$$

В итоге будем иметь:

$$\bar{v}_0 [z_1\varphi_1(\xi_1) - \varphi_2(\xi_1)] + \bar{p}_0 [z_1\varphi_2(\xi_1) - \varphi_1(\xi_1)] = 0,$$

$$\bar{v}'_0 [z_2\varphi_1(\xi_2) - \varphi_2(\xi_2)] + \bar{p}'_0 [z_2\varphi_2(\xi_2) - \varphi_1(\xi_2)] = 0.$$

Принимая во внимание соотношения (31.1), нетрудно в последних равенствах свести число независимых переменных к двум, например, $\bar{v}_0$ и $\bar{p}_0$.

В итоге найдем характеристическое уравнение задачи:

$$\left| \begin{array}{cc} z_1\varphi_1(\xi_1) - \varphi_2(\xi_1) & z_1\varphi_2(\xi_1) - \varphi_1(\xi_1) \\ a_{11}[z_2\varphi_1(\xi_2) - \varphi_2(\xi_2)] + & a_{12}[z_2\varphi_1(\xi_2) - \varphi_2(\xi_2)] + \\ + a_{21}[z_2\varphi_2(\xi_2) - \varphi_1(\xi_2)] & + a_{22}[z_2\varphi_2(\xi_2) - \varphi_1(\xi_2)] \end{array} \right| = 0. \quad (31.3)$$

С использованием соотношений (4.14) и (22.5) из (31.3) получим:

$$\begin{aligned} C_1 \exp\left(\frac{2}{1-M_1^2} \beta l_1\right) \exp\left(\frac{2}{n(1-M_2^2)} \beta l_2\right) + C_2 \exp\left(\frac{2}{1-M_1^2} \beta l_1\right) + \\ + C_3 \exp\left(\frac{2}{n(1-M_2^2)} \beta l_2\right) + C_4 = 0, \end{aligned} \quad (31.4)$$

1,40

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= (z_1 - 1)(z_2 + 1)(a_{12} - a_{22} - a_{11} + a_{21}), \\ C_2 &= (z_1 - 1)(z_2 - 1)(a_{12} + a_{22} - a_{11} - a_{21}), \\ C_3 &= (z_1 + 1)(z_2 + 1)(a_{12} - a_{22} + a_{11} - a_{21}), \\ C_4 &= (z_1 + 1)(z_2 - 1)(a_{12} + a_{22} + a_{11} + a_{21}). \end{aligned} \right\} \quad (31.5)$$

Таким образом, полученное характеристическое уравнение отличается от уравнения (23.5) лишь выражениями для коэффициентов C_1, C_2, C_3 и C_4 .

В предыдущей главе характеристическое уравнение (23.5) приводилось к системе двух уравнений (23.7), связывающих только вещественные переменные. Если попытаться сделать это и в рассматриваемом случае, то полученные уравнения будут отличаться большей громоздкостью. Дело в том, что теперь уже нельзя предполагать вещественность C_1, C_2, C_3 и C_4 , поскольку импедансы z_1 и z_2 , вообще говоря, являются комплексными числами. Разделение уравнения (31.4) на систему двух уравнений, связывающих вещественные переменные, удобнее производить уже после подстановки численных значений $z_1, z_2, a_{11}, a_{12}, a_{21}$ и a_{22} .

Из написанного общего уравнения (31.4) легко могут быть получены частные случаи. В предыдущей главе рассматривалось характеристическое уравнение этой же задачи, но в предположении, что на концах трубы расположены узлы давления. Узлы давления описываются условием $\bar{p} = 0$. Сравнивая это условие с (30.1), видим, что узлу давления отвечает случай $z = 0$. Точно так же получим, что узлу скорости $\bar{v} = 0$ соответствует акустический импеданс $z = \infty$.

Если комбинировать оба типа краевых условий ($\bar{p} = 0$ и $\bar{v} = 0$), то всего возможны 4 случая:

- 1) $\bar{p}_1 = 0, \quad p_2 = 0;$
- 2) $\bar{p}_1 = 0, \quad \bar{v}_2 = 0;$
- 3) $\bar{v}_1 = 0, \quad p_2 = 0;$
- 4) $\bar{v}_1 = 0, \quad \bar{v}_2 = 0.$

Введем для величин, входящих в формулы (31.5), следующие обозначения:

$$c_1 = a_{12} - a_{22} - a_{11} + a_{21},$$

$$c_2 = a_{12} + a_{22} - a_{11} - a_{21},$$

$$c_3 = a_{12} - a_{22} + a_{11} - a_{21},$$

$$c_4 = a_{12} + a_{22} + a_{11} + a_{21}.$$

Тогда первому случаю отвечают равенства

$$C_1 = -c_1, \quad C_2 = c_2, \quad C_3 = c_3, \quad C_4 = c_4;$$

второму —

$$C_1 = -c_1, \quad C_2 = -c_2, \quad C_3 = c_3, \quad C_4 = c_4;$$

третьему —

$$C_1 = c_1, \quad C_2 = -c_2, \quad C_3 = c_3, \quad C_4 = -c_4$$

и четвертому —

$$C_1 = c_1, \quad C_2 = c_2, \quad C_3 = c_3, \quad C_4 = c_4.$$

Предполагая вещественность коэффициентов c_1, c_2, c_3 и c_4 , анализ свойств колебательной системы во всех этих случаях можно вести точно так же, как был проведен анализ первого случая в гл. V.

Нужно отметить, что столь же простого метода решения и анализа уравнения (31.4) для произвольных значений граничных импеданцев не существует. Главным затруднением при этом является то обстоятельство, что частота ω входит в выражение для z (30.8). Поэтому решение уравнения (31.4) может быть получено лишь громоздкими численными методами.

§ 32. Численное рассмотрение некоторых частных случаев

Анализ характера возмущенного процесса на основании уравнения (31.4) возможен двояким образом. Во-первых, путем рассмотрения численных примеров и, во-вторых, путем теоретического исследования частных случаев, допускающих аналитическое рассмотрение. В настоящем параграфе будет использована первая из названных возможностей.

Найдем по аналогии с расчетами, приведенными в предыдущей главе, границу устойчивости при наличии потерь на концах трубы, т. е. будем искать такие значения δX и δE , при которых колебательная система нейтральна. Будем считать режим течения и положение плоскости подвода тепла заданными (т. е. заданными n , M_1 , M_2 , l_1 и l_2), а в качестве переменного параметра выберем частоту колебаний ω . Так как по условию $v = 0$ (рассматривается граница устойчивости), то тем самым заданы (для каждого ω) все входящие в уравнение (31.4) величины, кроме коэффициентов C_1 , C_2 , C_3 и C_4 , зависящих (через a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22}) от искомых δX и δE .

Сравнив формулы (17.1) и (31.1), легко видеть, что при $\delta E = y_1 \bar{p}_0$ и $\delta X = y_2 \bar{v}_0$ (где y_1 и y_2 — комплексные коэффициенты, которые математически выражают существование некоторого механизма обратной связи):

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{n}, & a_{12} &= \frac{y_1}{n}, \\ a_{21} &= \frac{y_2}{m}, & a_{22} &= \frac{1}{m}. \end{aligned} \right\} \quad (32.1)$$

Рассмотрим для определенности случай возбуждения колебаний при $\delta E = 0$. При сделанном предположении $y_1 = 0$ и уравнение (31.4) становится линейным относительно y_2 соотношением, из которого последняя величина легко определяется.

Результаты такого рода расчета приводятся ниже. Расчет был проведен для двух случаев. В первом анализировалось влияние частоты колебаний на положение границы устойчивости, во втором — влияние изменения относительной длины трубы $\frac{L}{d}$ (точнее, обратной величины $\frac{L}{d}$) на тот же фактор. В обоих случаях расчет велся для $M_1 = 0,15$; $n = 2,5$; $m \cong 1$; $l_1 = l_2 = 0,5$.

В первой серии расчетов, имевшей целью проиллюстрировать влияние частоты колебаний на положение границы устойчивости, величина $\frac{d}{L}$ была принята равной 0,2, т. е. рассматривалась сравнительно короткая труба, длина которой равнялась 5 калибрам. Результаты расчета при-

ведены на рис. 61. Здесь по оси абсцисс отложена вещественная, а по оси ординат — мнимая часть y_2 . Комплексный коэффициент y_2 дает возможность судить об амплитудно-фазовом соотношении между δX и $\bar{v}_0$. В предыдущей

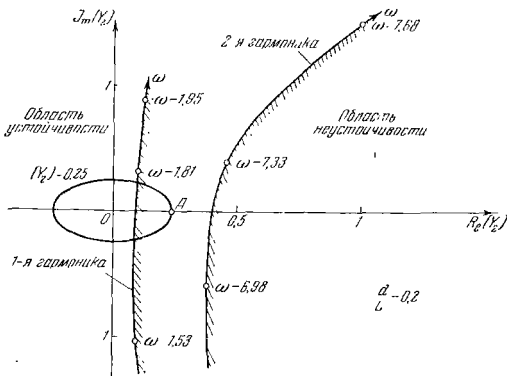


Рис. 61. Влияние частоты колебаний ω на положение границы устойчивости.

главе и ранее было получено чрезвычайно простое условие самовозбуждения колебаний при отсутствии потерь:

угол между фазами $\bar{v}_0$ и δX должен быть менее $\frac{\pi}{2}$. Посколь-

ку при $\delta X - y_2 \bar{v}_0$ фазы δX и $\bar{v}_0$ совпадают при положительных (вещественных) значениях y_2 , границей устойчивости в рассмотренном ранее примере является мнимая ось, а областью неустойчивости — вся правая полуплоскость на рис. 61. Как видно из расположения кривых y_2 на рис. 61, при учете потерь область неустойчивости уменьшается границы устойчивости смещаются вправо от мнимой оси и смещаются тем сильнее, чем больше частота колебаний (на диаграмме «неустойчивая» сторона

границы устойчивости заштрихована). При этом условие возбуждения усложняется — теперь существенна не только фаза δX , но и амплитуда.

Наименьшая относительная амплитуда величины δX (r_0 условно принято за единицу), при которой возможно возбуждение, получается тогда, когда фазы δX и $\bar{v}_0$ совпадают (y_2 — действительная величина). На рис. 61 приведены лишь две ветви y_2 (соответствующие первой и второй гармоникам). Как видно из диаграммы, увеличение частоты (переход от первой ко второй гармонике) влечет за собою увеличение абсолютных величин y_2 , т. е. увеличение относительных амплитуд δX , потребных для возбуждения системы.

Этот результат легко поддается объяснению. Оценим влияние частоты колебаний на потери акустической энергии в окружающем трубу пространстве. С этой целью воспользуемся выражением (30.7), которое позволяет вычислить поток акустической энергии, движущейся через концевое сечение трубы. При этом учтем формулу (30.6), позволяющую выразить $|\xi|^2$ через вещественную и мнимую части импеданса z . Тогда

$$A = \frac{r}{2Q_0 a [(1 + r)^2 + x^2]} u^2.$$

Полученная формула указывает, в частности, что знак A (направление потока акустической энергии) связан со знаком коэффициента активного сопротивления r . Эта формула может быть упрощена следующим образом. Заметим, что выражение, стоящее в прямых скобках, близко к единице, так как для рассматриваемых задач величины r и x малы по сравнению с единицей. Это видно, например, из приближенной формулы для z (30.8) и особо подчеркивалось в конце § 30.

Таким образом, для достаточно «длинных» труб и для низких гармоник

$$A \simeq \frac{r u^2}{2Q_0 a} \simeq \left(\frac{d}{4L} \omega \right)^2 \frac{u^2}{2Q_0 a}. \quad (32.2)$$

Приближенное равенство (32.2) показывает, что поток акустической энергии через концевое сечение трубы пропорционален квадрату частоты. Следовательно, умень-

шение вероятности возбуждения по мере перехода к высшим гармоникам вполне естественно и ход кривых на рис. 61 надо считать типичным. Более высокие частоты дали бы границы устойчивости, еще более сдвинутые вправо.

На практике величина y_2 не может увеличиваться беспредельно. Реально существующие механизмы обратной связи обуславливают существование верхнего предела этой величины. Если, в частности, верхний предел y_2 больше значений, требуемых для возбуждения первой гармоники, но меньше значений, требуемых для возбуждения второй (точка А на рис. 61), то возбуждение колебаний основного тона возможно, а всех более высоких гармоник — невозможно. Рассмотренный пример хорошо объясняет то обстоятельство, что в опытах всегда наблюдается возбуждение колебаний сравнительно низкой частоты.

Оценим порядок y_2 . Из экспериментов известно, что при развитом процессе вибрационного горения амплитуда колебаний давления δp имеет порядок перепада давления между холодным и горячим газом, т. е. порядок подпора, вызванного тепловым сопротивлением. Этот перепад может быть выражен следующей формулой:

$$p_1 - p_2 = q_1 v_1^2 \left(\frac{v_2}{v_1} - 1 \right).$$

Таким образом,

$$|\delta p| \approx q_1 v_1^2 \left(\frac{v_2}{v_1} - 1 \right).$$

Переходя к безразмерным переменным и приняв, что в первом приближении $\frac{v_2}{v_1} = \frac{T_2}{T_1} = n^2$, получим:

$$|\bar{p}_1| \approx M_1^2 (n^2 - 1).$$

При развитых колебаниях амплитуда колебаний скорости имеет порядок скорости установившегося течения холодного газа и, следовательно,

$$|\bar{v}_1| = \left| \frac{\delta v_1}{a_1} \right| \approx \frac{v_1}{a_1} = M_1.$$

Порядок величины $\delta X \simeq \bar{p}_2 - \bar{p}_1$ можно считать совпадающим с порядком величин p_1 и $\bar{p}_2$. Тогда

$$|y_2| \leq \left| \frac{\bar{p}_1}{v_1} \right| \simeq M_1 (n^2 - 1).$$

Более вероятна меньшая величина y_2 , поскольку разность давлений слева и справа от зоны горения обычно составляет не более $1/2 \cdot 1/3$ полной амплитуды колебаний δp .

В рассмотренном здесь численном примере ($n^2 = 6,25$; $M_1 = 0,15$) порядок абсолютной величины y_2 будет, таким образом, не более $|y_2| = 0,25$. Сравнивая это значение с абсциссами точек пересечения кривых y_2 с вещественной осью (рис. 61), нетрудно прийти к выводу, что в данном случае возможно возбуждение лишь первой гармоники системы и то при особенно благоприятных обстоятельствах. Это видно из того, что окружность $|y_2| = 0,25$, захватывает лишь весьма незначительную часть области неустойчивости (при выбранных на рис. 61 масштабах эта окружность перешла в эллипс). Такой результат связан с тем, что принятое в расчете отношение $\frac{d}{L} = 0,2$ слишком велико. По сути, здесь рассматривается слишком «короткая» труба ($L = 5d$), для которой относительная величина потерь будет большой.

Это видно, например, из формулы (32.2), по которой потери растут не только пропорционально квадрату частоты, но и пропорционально квадрату отношения $\frac{d}{L}$. Следовательно, по мере уменьшения $\frac{d}{L}$ количество излучаемой в окружающее пространство акустической энергии должно падать и колебательная система становится все более и более склонной к возбуждению. Этим обстоятельством объясняется тот известный экспериментаторам факт, что вибрационное горение можно наблюдать лишь в достаточно «длинных» трубах, т. е. в трубах с малым значением параметра $\frac{d}{L}$.

Чтобы придать этим качественным соображениям наглядность, на рис. 62 приведены границы устойчивости

для вторых гармоник той же колебательной системы, что и рассматривавшаяся выше, но для трех значений параметра $\frac{d}{L}$: 0,2; 0,06 и 0. На приведенной диаграмме хорошо видно, что с уменьшением отношения $\frac{d}{L}$ требуемая

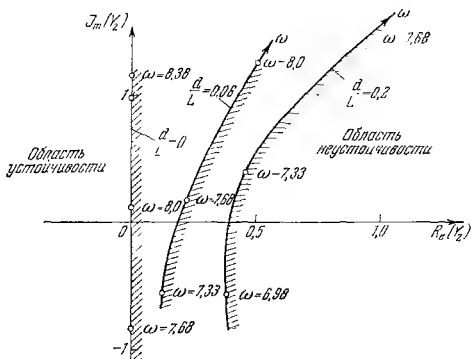


Рис. 62. Влияние параметра d/L на положение границы устойчивости.

для возбуждения системы величина $|y_2|$ уменьшается и стремится к нулю вместе с $\frac{d}{L}$.

Экспериментальным подтверждением полученных здесь теоретических выводов может служить наблюдение, сделанное Киркби и Уилером¹⁾. Указанные авторы пишут, что при диаметре трубы 100 мм возбуждение вибрационного горения в ней становилось возможным лишь при общей длине трубы, превышающей 1400 мм.

Если вернуться к численному примеру и продолжать считать верхней границей $|y_2|$ значения 0,25, то из рис. 62

¹⁾ Kirby, Wheeler, Journ. of the Chem. Soc., 1931, стр. 847.

следует, что при $L \cong 18d$ ($\frac{d}{L} = 0,06$) вторая гармоника может возбудиться, в то время как для $\frac{d}{L} = 0,2$ это невозможно.

Приведенный выше пример демпфирующего влияния увеличения частоты колебаний позволяет сделать наглядными те рассуждения о возможности пренебрежения начальными условиями, которые приводились в главе II.

Пусть колебательная система имеет те же параметры, что были использованы в численном примере § 23. Единственное отличие будет заключаться в том, что потерям на излучение акустической энергии во внешнюю среду пренебрегать не будем. На рис. 33 приведены величины ω и ν , полученные для разных гармоник без учета потерь на излучение. Если учесть эти потери, то ν и ω для первой гармоники вряд ли изменятся сколько-нибудь заметным образом. Вторая и третья гармоники и без учета потерь на излучение задемпфированы достаточно сильно ($\nu \ll 0$), учет потерь на излучение лишь усилит это демпфирование. Что касается четвертой гармоники, то без учета потерь на излучение она, как и первая гармоника, почти нейтральна. Однако учет потерь резко изменит это положение, так как частота этой гармоники в 4,5 раза превосходит частоту основного тона, а потери на излучение возрастут, следовательно, в 20 раз. Это соображение позволяет считать все гармоники выше третьей задемпфированными значительно сильнее первой. Будем поэтому в последующих расчетах учитывать лишь три первые гармоники.

Пусть характер процесса в зоне горения, на основании которого были построены кривые рис. 33, слабо изменится. Пусть указанное слабое изменение произошло так, что первая гармоника стала нейтральной ($\nu = 0$). Что касается второй и третьей гармоник, то сохраним соответствующие им значения ν , хотя учет потерь скорее всего увеличит декременты затухания.

Предположим, что в начальный момент $t = 0$ в трубе происходило стоячее колебательное движение воздушных масс, составленное из стоячих волн первых трех гармоник, причем амплитуды второй и третьей гармоник вдвое

превышали амплитуды стоячей волны основного тона, а фазы всех трех гармоник совпадали. Тогда эюра мгновенного значения возмущения $\bar{p}$ имела бы вид, изображенный в верхней части рис. 63. Вид этой же эюры в последующие моменты времени τ_1 , τ_2 , τ_3 дан на том

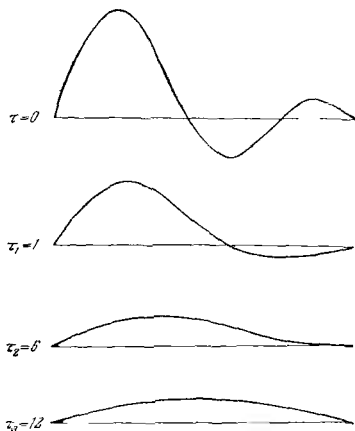


Рис. 63. Постепенное исчезновение влияния начальных условий.

же рисунке ниже. Нетрудно видеть, что уже через время $\tau \approx 12$ сохраняются лишь колебания основного тона. Это время соответствует приблизительно 6–7 колебаниям основного тона. Если учесть, что продольные акустические колебания, с которыми приходится иметь дело на практике, находятся в пределах 20–1000 герц, то очевидно, что весь эффект, связанный с начальными условиями, исчезнет за доли секунды.

Приведенная здесь грубая оценка имела целью дать наглядное представление о скорости, с которой сглаживается влияние начальных условий в рассматриваемых системах.

§ 33. Полное поглощение энергии на одном конце трубы

Выше уже указывалось, что численный анализ конкретных случаев является почти единственным методом изучения задач, рассматриваемых в настоящей главе. Однако в некоторых случаях оказывается возможным аналитическое рассмотрение. Такой задачей является, в частности, исследование колебательной системы при полном поглощении энергии падающей акустической волны на одном из концов трубы.

Пусть в коцевом сечении трубы с координатой ξ_1 (рис. 22) импеданс отверстия известен и равен z_1 . На другом конце трубы с координатой ξ_2 пусть происходит полное поглощение энергии подходящих к ξ_2 акустических волн. В таком случае краевое условие для конца с координатой ξ_2 будет:

$$z_2 = 1.$$

Действительно, если перейти к переменным u , w , то формула (30.5) дает: при $z=1$ $\xi \rightarrow 0$. Но тогда из равенств (30.3) следует, что $w=0$ при $u \neq 0$. Во второй главе говорилось, что величины w и u представляют собой акустические импульсы, движущиеся по потоку (u) и против потока (w). Таким образом, при $z_2=1$ получается, что движущийся по потоку отличный от нуля акустический импульс u при взаимодействии с правым концом ($\xi = \xi_2$) дает отраженный импульс w нулевой интенсивности. Это и говорит о полном поглощении акустической энергии у конца с координатой $\xi = \xi_2$.

Подставив $z_2=1$ в характеристическое уравнение (31.4), сразу получаем его частный вид, соответствующий рассматриваемой задаче:

$$\exp\left(\frac{2}{1-M_1^2} \beta l_1\right) = \frac{(z_1 + 1)(a_{12} - a_{22} + a_{11} - a_{21})}{(z_1 - 1)(a_{12} + a_{22} - a_{11} + a_{21})}. \quad (33.1)$$

При заданном процессе в зоне горения (заданных δE и δX , т. е., в конечном итоге, при заданных a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22}) правая часть уравнения (33.1) полностью определена. В общем случае вычисления дадут некоторое комплексное число $A + Bi$. Тогда вместо (33.1) можно написать:

$$\exp\left(\frac{2}{1-M_1^2} \nu l_1\right) \left[\cos \frac{2}{1-M_1^2} \omega l_1 + i \sin \frac{2}{1-M_1^2} \omega l_1 \right] = A + Bi. \quad (33.2)$$

Приравнявая вещественные и мнимые части, сразу находим:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \frac{1-M_1^2}{2l_1} \operatorname{Arctg} \frac{B}{A}, \\ \nu &= \frac{1-M_1^2}{2l_1} \ln \frac{A}{\cos \left[\operatorname{Arctg} \frac{B}{A} \right]}. \end{aligned} \right\} \quad (33.3)$$

Не все частоты ω , даваемые первой формулой (33.3), являются решением. Очевидно, что из множества частот следует выбрать те, для которых величина $\cos \left[\operatorname{Arctg} \frac{B}{A} \right]$ имеет тот же знак, что и число A , поскольку величина $\exp \left(\frac{2}{1-M_1^2} \nu l_1 \right)$ может быть лишь положительной.

Относительно полученного здесь решения уместно сделать ряд замечаний. Расстояние l_2 , на которое удалено от зоны горения сечение, где происходит полное поглощение колебательной энергии, не оказывает никакого влияния на решение. Результат этот понятен, поскольку в сечении ξ_2 гасятся все волны, идущие из зоны горения, и отраженных волн не возникает. Поэтому справа от плоскости подвода тепла Σ существуют лишь волны, бегущие в положительном направлении оси ξ . С этой точки зрения наличие справа от плоскости Σ сечения с impedance $z=1$ эквивалентно бесконечной протяженности трубы в положительном направлении. В этой связи может показаться неожиданным существование собственных частот, даваемых первой формулой (33.3). Как известно, стоячие волны, типа описываемых решением (33.3), возникают благодаря наличию последовательности отра-

жений акустических импульсов от обоих концов трубы. В рассматриваемом случае краевое условие $z_2 = 1$ эквивалентно полубесконечной трубе, в которой отсутствуют волны, отраженные от правого конца. Стоячие волны все же возникают потому, что вторым краевым условием по сути дела являются условия взаимодействия акустических волн и процессов в зоне теплоподвода. Дело в том, что подходящие к зоне теплоподвода волны не только проходят ее, но частично и отражаются. Кроме того, колеблющийся под действием падающих волн процесс теплоподвода способен сам порождать акустические волны, распространяющиеся в обе стороны. Эти отраженные и генерированные волны возвращаются к сечению ξ_1 , и, таким образом, между левым концом трубы и зоной теплоподвода существуют оба типа волн — как бегущие в положительном, так и бегущие в отрицательном направлении. Их взаимодействие и приводит к образованию стоячей волны. Этим обстоятельством объясняется также тот факт, что собственные частоты зависят лишь от расстояния l_1 , значения M_1 , импеданса z_1 и от свойств плоскости теплоподвода Σ .

Возникает естественный вопрос: может ли подобная система возбуждаться, т. е. могут ли существовать такие условия на Σ , которые дадут $\nu > 0$?

Чтобы ответить на этот вопрос, упростим несколько задачу, предположив, что в сечении ξ_1 расположен узел давления или скорости ($z_1 = 0$ или $z_1 = \infty$).

Из решения (33.1) видно, что эти два случая отличаются лишь знаком правой части решения. Обращаясь к формулам (33.3), легко заметить, что указанное отличие приведет лишь к изменению частот колебаний, но не может изменить величины ν . Поэтому оба случая будут рассматриваться совместно, причем для определенности будет положено $z_1 = \infty$. Этот выбор краевого условия на левом конце трубы диктуется также тем, что известны опыты, на которые ниже будет сделана ссылка, позволяющие сравнить полученное теоретическое решение с экспериментом. Чтобы найти число

$$A + Bi = - \frac{a_{12} \cdot a_{22} + a_{11} - a_{21}}{a_{12} - a_{22} - a_{11} + a_{21}},$$

обратимся к формулам (32.1). После подстановки значений коэффициентов a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} получим:

$$A + Bi = - \frac{\frac{m}{n} (y_1 + 1) - (y_2 + 1)}{\frac{m}{n} (y_1 - 1) + (y_2 - 1)}.$$

Рассмотрим, как это делалось и в предыдущей главе, два элементарных процесса в зоне теплоподвода. Один из них характеризуется условием $\delta E = 0$ ($y_1 = 0$), другой — условием $\delta X = 0$ ($y_2 = 0$). Выпишем значения числа $A + Bi$ для этих случаев:

$$\left. \begin{aligned} A + Bi &= - \frac{\frac{n}{m} - (y_1 + 1)}{\frac{n}{m} - (y_1 - 1)} & (y_2 = 0), \\ A + Bi &= \frac{\frac{m}{n} - (y_2 + 1)}{\frac{m}{n} - (y_2 - 1)} & (y_1 = 0). \end{aligned} \right\} \quad (33.4)$$

Сравнение двух выражений (33.4) показывает, что они имеют совершенно одинаковую структуру. Поэтому результаты, полученные при исследовании одного случая, нетрудно перенести и на другой.

Для определенности примем, что $y_1 = 0$. Положим далее

$$y_2 = a + bi. \quad (33.5)$$

После несложных преобразований получим:

$$A + Bi = \frac{\left[\left(a - \frac{m}{n} \right)^2 - 1 + b^2 \right] - 2bi}{\left(a - 1 - \frac{m}{n} \right)^2 + b^2}.$$

Обозначим для сокращения записи

$$\exp \left(\frac{2}{1 + M_1^2} \nu l_1 \right) = c. \quad (33.6)$$

Тогда на основании равенства (33.2) можно составить следующую систему уравнений, связывающую веществен-

ные переменные a и b :

$$\left. \begin{aligned} \left(a - \frac{m}{n}\right)^2 - 1 + b^2 &= -2b \operatorname{ctg} \frac{2}{1-M_1^2} \omega l_1, \\ c \left[\left(a - 1 - \frac{m}{n}\right)^2 + b^2 \right] &= \frac{-2b}{\sin \frac{2}{1-M_1^2} \omega l_1}. \end{aligned} \right\} \quad (33.7)$$

Будем искать линии равных γ в комплексной плоскости переменного y_2 (33.5). При заданных значениях l_1 и M_1 для заданного постоянного γ величина c тоже будет заданным числом. Пользуясь системой (33.7), можно найти значения a и b , являющиеся вещественной и мнимой частями y_2 для серии заданных γ . Физически это означает нахождение таких относительных значений δX , при которых возникают колебания с наперед заданным инкрементом или декрементом γ . Входящая в систему (33.7) частота ω является параметром, подлежащим исключению.

Возведя равенства (33.7) в квадрат и воспользовавшись известным тригонометрическим соотношением

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha},$$

получаем искомое соотношение, связывающее a и b :

$$\begin{aligned} &\left[\left(a - \frac{m}{n}\right)^2 - 1 + b^2 \right]^2 - \\ &- c^2 \left[\left(a - 1 - \frac{m}{n}\right)^2 + b^2 \right]^2 + 4b^2 = 0. \end{aligned} \quad (33.8)$$

Уравнение (33.8) является уравнением четвертой степени относительно a и b . Поэтому можно ожидать сложного вида кривой, определяемой этим уравнением в координатной плоскости (a, b) . Внимательный анализ позволяет установить, что уравнению (33.8) можно придать следующий вид:

$$\begin{aligned} &\left[\left(a - 1 - \frac{m}{n}\right)^2 + b^2 \right] \left\{ \left[\left(a - 1 - \frac{m}{n}\right)^2 + b^2 \right] - \right. \\ &\quad \left. - c^2 \left[\left(a - 1 - \frac{m}{n}\right)^2 + b^2 \right] \right\} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (33.8) распадается на два квадратных, и вместо кривой четвертого порядка в пло-

скости (a , b) получим окружность

$$\left(a + 1 - \frac{m}{n}\right)^2 + b^2 - c^2 \left[\left(a - 1 - \frac{m}{n}\right)^2 + b^2\right] = 0, \quad (33.9)$$

положение и радиус которой зависят от параметра c , и окружность, выродившуюся в точку

$$\left(1 + \frac{m}{n}; 0\right). \quad (33.10)$$

Физический интерес представляет окружность (33.9). По определению на границе устойчивости $\nu = 0$, что на основании равенства (33.6) приводит к $c = 1$. Но тогда (33.9) вырождается в уравнение прямой и дает

$$a = \frac{m}{n}. \quad (33.11)$$

Таким образом, границей устойчивости в рассматриваемом случае является прямая, параллельная мнимой оси и идущая на расстоянии $\frac{m}{n}$ от начала координат. В общем случае семейство окружностей (33.9) характеризуется тем, что центры окружностей всегда лежат на вещественной оси (в уравнении семейства отсутствуют члены, линейно зависящие от b). Дальнейший анализ полученного решения удобнее провести на численном примере.

Примем, как и в предыдущем примере, $\frac{m}{n} = 0,4$. Задавая значения $c = 2,5; 1,67; 1,25; 1,0; 0,83$ и $0,713$ ($c > 1$ — неустойчивость, $c < 1$ — устойчивость), получим семейство линий $\nu = \text{const}$, изображенное на рис. 64. Как видно из этой диаграммы, по мере стремления ν к $-\infty$ или $+\infty$ ¹⁾ (соответственно $c \rightarrow 0$ и $c \rightarrow \infty$) радиусы окружностей уменьшаются, стремясь к нулю. В пределе, при $c \rightarrow 0$ из уравнения (33.9) получаем окружность нулевого радиуса (точку) с координатами $(-1 + \frac{m}{n}; 0)$, а при $c \rightarrow \infty$ точку $(1 + \frac{m}{n}; 0)$. Эти точки помечены на рис. 64 буквами А и В. Относительно последней точки следует заметить, что она

¹⁾ Напомним еще раз, что при $|\nu| \rightarrow \infty$ решение имеет лишь формальный смысл. Чтобы получить истинную картину поведения системы при параметрах, дающих $|\nu| \rightarrow \infty$, следовало бы решить задачу с учетом начальных условий и нелинейных свойств системы.

является не только предельным значением линии равно-
го шкремента при $\nu \rightarrow +\infty$, но и удовлетворяет всем

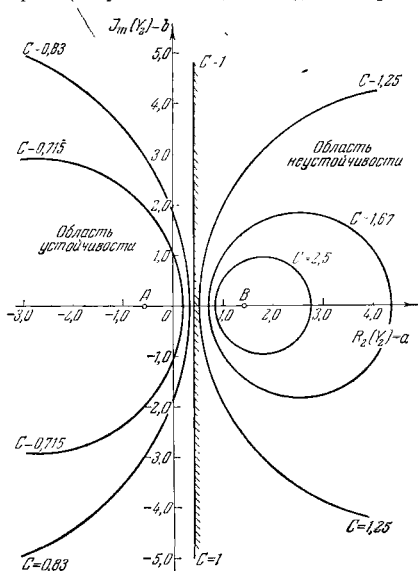


Рис. 64. Диаграмма устойчивости для случая полного поглощения акустической энергии на одном конце трубы.

остальным значениям ν , как это видно из сравнения координат точки B и (33.10).

Расположение границ устойчивости на рис. 64 указывает на то, что при $\delta X = \delta E = 0$ (начало координат) система устойчива. Напомним, что при отсутствии потерь на

концах и при $\delta X = \delta E = 0$ она была нейтральная. Таким образом, наличие потерь, как и следовало ожидать, делает колебательную систему более устойчивой, менее склонной к возбуждению.

Определим степень устойчивости системы в этом случае. Воспользовавшись формулами (33.3) и (33.4) и положив $y_1 = y_2 = 0$, сразу находим:

$$\omega = \frac{1 - M_1^2}{2l_1} k\pi,$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \dots$; при этом $z_1 = 0$ соответствуют четные, а $z_1 = \infty$ — нечетные значения k . Вне зависимости от этих значений z_1 , декремент затухания будет равен:

$$\nu = \frac{1 - M_1^2}{2l_1} \ln \frac{1 - \frac{m}{n}}{1 + \frac{m}{n}}.$$

Как видно из полученной формулы, степень устойчивости процесса колебаний зависит главным образом от $\frac{m}{n}$, точнее, от n , так как $m \cong 1$. Величина n равна отношению скоростей звука в горячем и холодном газе и, следовательно, степень устойчивости процесса в рассматриваемой системе прежде всего зависит от отношения температур горячего и холодного газа. Чем больше это отношение (чем больше n), тем ближе процесс к нейтральному. При равенстве температур по обе стороны Σ (т. е. при $n = 1$) и при $m = 1$ (как уже говорилось, эта величина всегда близка к единице) $\nu \rightarrow -\infty$.

Физически такая картина объясняется тем, что чем выше температура справа от Σ , тем большая доля волн отражается от Σ и тем большая доля энергии этих волн сохраняется на участке l_1 . При $n = 1$ отражения совершенно не происходит и процесс поэтому формально бесконечно устойчив.

Полученное здесь решение показывает, что в принципе система с полным поглощением колебательной энергии на одном из концов трубы может возбуждаться. Оценим вероятность такого возбуждения. Как следует из формул (33.11) и (33.5), на границе устойчивости $|y_2| \geq \frac{m}{n}$. В рас-

рассматриваемом численном примере это приводит к необходимому условию возбуждения $|y_2| > 0,4$. Однако приведенная выше (см. § 32) оценка показывает, что подобные величины $|y_2|$ почти невероятны. Таким образом, в рассмотренном численном примере возбуждение колебаний практически невозможно. Этот результат является типичным для процесса возбуждения акустических колебаний пламенем.

Интересно отметить, что полученный здесь теоретический вывод подтверждается экспериментально. В экспериментах Коварда, Хартвелла и Джорджсона, о которых уже была речь во введении, наряду с прочим наблюдался такой факт. Когда открытый конец трубы, в которой распространялось пламя, ничем не загораживался, то экспериментаторы получали хорошо выраженные акустические колебания со скачкообразным изменением частот колебаний, которые подробно описаны выше. В тех же случаях, когда у открытого конца трубы располагалась стеклянная вата, колебания не возникали совершенно.

Стеклянную вату, помещенную у открытого конца, можно считать устройством, полностью гасящим падающие на него акустические волны и не препятствующим истечению продуктов сгорания. В теоретической схеме такому краевому условию соответствует $z_2 = 1$.

На рис. 1 приведены записи колебаний давления, полученные в опытах Коварда, Хартвелла и Джорджсона. В верхней части рис. 1 дана запись при отсутствии стеклянной ваты у открытого конца трубы, в нижней части дается запись, полученная в тех же условиях, но при демпфировании акустических колебаний при помощи стеклянной ваты. Приведенные кривые наглядно иллюстрируют полученные в настоящем параграфе теоретические выводы.

Здесь был теоретически рассмотрен лишь один из возможных процессов в зоне горения, а именно — процесс, характеризующийся условием $\delta E = 0$. Все полученные закономерности справедливы и для другого элементарного процесса ($\delta X = 0$). Соответствующие формулы могут быть получены заменой $\frac{m}{n}$ на $\frac{n}{m}$ в выражениях настоящего параграфа. Более сложные случаи ($\delta E \neq 0$; $\delta X \neq 0$) можно

также подвергнуть исследованию по развитой здесь методике, хотя они потребуют трудоемкого численного анализа. Эти случаи не анализируются, поскольку рассматриваемая задача представляет лишь ограниченный интерес. Произведенные оценки показывают, что во всех этих случаях окончательный результат не изменится — наличие полного поглощения энергии на одном из концов трубы в сильнейшей мере затрудняет возможность возбуждения колебательной системы. Это обстоятельство позволяет сравнивать результаты опытов Коварда, Хартвелла и Джорджсона, полученные при неизвестных δE и δA с расчетами, произведенными в настоящем параграфе для элементарных процессов.

ГЛАВА VII

МЕХАНИЗМЫ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПРИ ВОЗБУЖДЕНИИ АКУСТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ГОРЕНИЕМ

§ 34. Классификация механизмов обратной связи

В предыдущих главах был решен ряд задач о возбуждении акустических колебаний теплоподводом, причем всякий раз, явно или неявно, вводилось предположение о существовании обратной связи, т. е. об обратном воздействии акустических колебаний на процесс горения. О большой роли, которую играет в рассматриваемом явлении обратная связь, уже говорилось в § 22. Чаще всего она вводилась чисто формально, например в виде некоторого множителя u , связывающего возмущение скорости потока v (акустическое явление) с величиной δX (параметр, характеризующий возмущение процесса горения). Иногда, как это было сделано в § 25, механизм обратной связи описывался подробно, и тогда необходимости введения такой формальной связи между акустическими колебаниями и процессом горения не возникало.

Настоящая глава посвящается описанию различных физических явлений, через которые реализуется обратная связь в рассматриваемой колебательной системе. Здесь следует сразу указать, что, как правило, между акустическими колебаниями и колебаниями процесса горения стоит целая цепочка связывающих их процессов. Так, например, колебания скорости течения в области расположения форсунок приводят к колебаниям коэффициента избытка воздуха и других характеристик смесиобразования (качество распыла горючего, траектории движения капель горючего и т. п.), а периодически изменя-

ющиеся свойства горючей смеси приводят к периодическим возмущениям процесса горения. В настоящем примере «цепочка» состоит всего из двух звеньев: акустические колебания возмущают смесеобразование, а смесеобразование передаст свои возмущения процессу горения. Вообще же количество таких звеньев может быть и большим.

При объяснении механизмов обратной связи эти последовательно связанные причины и следствия будут по возможности подробно описываться. Однако в теоретическом анализе вся цепочка причин и следствий всегда рассматривается как нечто целое, как некоторый единый механизм обратной связи.

Подробное описание механизмов обратной связи необходимо по двум причинам. Во-первых, только ясное представление о физической сущности явления, играющего роль обратной связи в том или ином случае, позволяет «разорвать» возникшую обратную связь и, тем самым, погасить колебания, если они нежелательны, или, наоборот, стимулировать возбуждение колебаний. Во-вторых, зная физическую сущность механизма обратной связи, можно описать ее аналитически и получить теоретическое решение задачи о возбуждении колебательной системы не в зависимости от амплитудно-фазовых соотношений между $\dot{v}$, $\bar{p}$ и δE , δX , а в зависимости от более «наглядных» и удобных для инженера параметров. Выше, в § 25, был дан пример доведения задачи о возбуждении акустических колебаний горением до такой формы. Задавшись некоторым конкретным механизмом обратной связи (здесь не обсуждается вопрос о том, насколько этот механизм вероятен), были получены вполне конкретные выводы, например вывод о том, что система будет возбуждаться в случае достаточно крутого увеличения полноты сгорания при увеличении коэффициента избытка воздуха.

Нередко авторы, работающие в области изучения вибрационного горения, ищут какую-то единственную, главную причину возникновения неустойчивости. По сути, это обычно сводится к поискам главного механизма обратной связи. Иногда это и удается для какого-либо конкретного случая вибрационного горения, наблюдающегося в конкретных условиях некоторой экспериментальной

установки. Однако попытка найти такой главный механизм обратной связи, годный для большой группы экспериментальных установок, камер сгорания двигателей или топок, обычно заканчивается неудачей.

Дело в том, что на самом деле существует много различных механизмов обратной связи, которые в конечном итоге приводят к колеблющемуся тепловыделению или колебаниям положения фронта пламени (или к тому и другому одновременно) и через них, как было показано выше, к возбуждению и поддержанию акустических колебаний. При этом оказывается, что «главным» механизмом обратной связи может оказаться то один, то другой, в зависимости от конкретных условий опыта.

Ниже будет дана характеристика основных механизмов обратной связи. Конечно, перечисленные ниже механизмы отнюдь не исчерпывают всего множества вероятных причин поддержания вибрационного горения. В настоящей главе будет дана краткая сводка лишь тех явлений, которые на сегодняшний день достаточно часто наблюдались и которые, видимо, играют в рассматриваемом типе автоколебаний основную роль. Поскольку процессы горения в камерах сгорания топок и двигателей связаны с процессами смесеобразования, вихреобразования и собственно горения, то и все механизмы обратной связи можно разбить на механизмы, связанные со смесеобразованием, гидромеханикой потока и собственно горением. Конечно, эта классификация, как и другие мыслимые классификации, является весьма условной, и многие явления могут одновременно тяготеть к двум, а то и всем трем подразделениям.

Заметим здесь, что обратная связь может, вообще говоря, замыкаться и через системы автоматического регулирования, установленные на топках или двигателях. Однако, если такие колебания, связанные с системой регулирования, и возбуждаются, то они обычно не являются акустическими, так как быстроедействие систем автоматического регулирования недостаточно для реагирования на акустические колебания, нередко имеющие порядок 100 и более герц. Поскольку в настоящей книге изучаются лишь акустические колебания, то колебания параметров течения и процесса горения, связанные

с работой системы автоматического регулирования, здесь рассматриваться не будут. Если же где-либо и встретится случай взаимодействия системы регулирования с акустическими колебаниями, то анализ этого процесса может быть проведен теми же методами, которыми производится рассмотрение самовозбуждения акустических колебаний теплоподводом при отсутствии каких-либо регуляторов процесса горения или процесса течения воздуха и продуктов сгорания по тракту топки или двигателя.

Приведенную несколько выше классификацию механизмов обратной связи по физической сущности явлений,

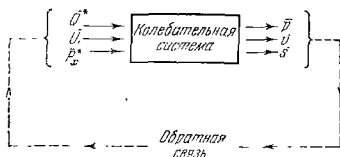


Рис. 65. Схематическое изображение обратной связи.

лежащих в их основе, можно дополнить классификацией по типу воздействия обратной связи на колебательную систему. Хотя рассматриваемая акустическая система является классическим примером колебательной системы с распределенными параметрами, а современная теория автоматического регулирования рассматривает главным образом системы с сосредоточенными параметрами (системы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями, а не уравнениями в частных производных), здесь удобно воспользоваться некоторыми наглядными схемами, применяемыми в теории автоматического регулирования.

Изобразим колебательную систему в виде некоторого элемента, на вход которого поступают координаты, характеризующие процесс горения (Q^* , $\bar{U}$, P_x^*), а выходными координатами являются параметры акустических колебаний $\bar{p}$, $\dot{v}$ и $\dot{s}$ (рис. 65). Поясним приведенную схему

несколько подробнее. Входом на рис. 65 является область горения, процесс в которой можно, как было показано в § 16, полностью охарактеризовать эффективными возмущениями теплоподвода $\bar{Q}^*$, скорости перемещения фронты пламени $\bar{U}_1$ и гидравлического сопротивления $\bar{P}_x^*$. Поэтому заданием $\bar{Q}^*$, $\bar{U}_1$ и $\bar{P}_x^*$ задается процесс возмущенного горения и, поскольку акустические свойства колебательной системы считаются известными, величины $\bar{p}$, $\bar{v}$ и $\bar{s}$ для всех сечений трубы. Выходом на рис. 65 является вся масса колеблющегося газа, за вычетом зоны горения. Следовательно, изображенную на рис. 65 схему надо понимать так: если при заданных свойствах колебательной системы (M_1 , M_2 , положение зоны горения и т. п.) задать, кроме того, и свойства возмущенного горения ($\bar{Q}^*$, $\bar{U}_1$, $\bar{P}_x^*$), то тем самым будут определены и параметры акустических колебаний ($\bar{p}$, $\bar{v}$ и $\bar{s}$).

Наличие обратной связи приводит к тому, что акустические колебания (выходные координаты) воздействуют на процесс горения (входные координаты). На схеме это условно изображено в виде пунктирной линии, ведущей от выходных координат ко входным. Хотя каждая из входных координат зависит, вообще говоря, от всех трех выходных, и поэтому следовало бы провести девять линий, соединяющих $\bar{p}$, $\bar{v}$ и $\bar{s}$ с каждой входной координатой, этого можно избежать. Дело в том, что $\bar{p}$, $\bar{v}$ и $\bar{s}$ не являются вполне независимыми параметрами, физически они представляют некоторый единый процесс акустических колебаний. Поэтому, проводя одну линию, при изображении обратной связи можно говорить о том, что акустические колебания (как целое) воздействуют через некоторую обратную связь на процесс горения (как целое). При таком подходе можно вообще не интересоваться тремя входными и тремя выходными координатами, а изображать одну входную и одну выходную координату. Единой входной координатой будет возмущение процесса горения (имеющее составляющие $\bar{Q}^*$, $\bar{U}_1$ и $\bar{P}_x^*$), а выходной — акустическое возмущение (имеющее составляющие $\bar{p}$, $\bar{v}$ и $\bar{s}$). Для последующих рассмотрений подобный подход вполне достаточен и поэтому ниже все схемы будут

изображаться одной линией. Это, конечно, не значит, что вообще целесообразно детализировать характер зависимости входных координат от выходных. Когда надо

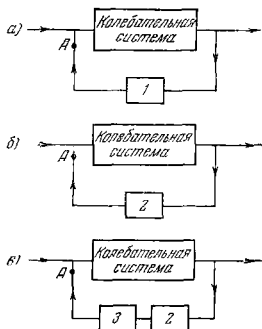


Рис. 66. Основные типы обратной связи.

произвести тщательный анализ какой либо конкретной обратной связи, то может оказаться необходимым и более детальное изучение особенностей зависимости каждого входного параметра от всех выходных. Однако в настоящем параграфе такая детализация была бы излишней.

Рассмотрим особенности, которыми могут обладать обратные связи различных типов, характерные для процесса термического возбуждения акустических колебаний.

Первый, простейший тип обратной связи показан на рис. 66, а. Здесь

выходная координата прежде чем поступить на вход колебательной системы преобразуется в звене 1, которое характеризуется тем, что изменяет величины составляющих выходной координаты, преобразуя их в составляющие входной. При этом звено 1 описывается системой уравнений вида

$$\left. \begin{aligned} Q^* &= a_{11}p + a_{12}\bar{v} + a_{13}\bar{s}, \\ \bar{U}_1 &= a_{21}\bar{p} + a_{22}\bar{v} + a_{23}\bar{s}, \\ \bar{P}_x^* &= a_{31}\bar{p} + a_{32}\bar{v} + a_{33}\bar{s}, \end{aligned} \right\} \quad (34.1)$$

где коэффициенты $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}$ — вещественные постоянные.

Такая обратная связь отличается тем, что составляющие входной координаты $\bar{Q}^*, \bar{U}_1$ и $\bar{P}_x^*$ мгновенно следуют

за изменением составляющих выходной координаты $\bar{p}$, $\bar{v}$ и $\bar{s}$. Величины коэффициентов a_{11} , a_{12} , ..., a_{23} играют при этом очень большую роль: при стремлении их всех одновременно к нулю, обратное воздействие $\bar{p}$, $\bar{v}$ и $\bar{s}$ на процесс горения уменьшается и тогда естественно говорить об ослаблении обратной связи; если, например, изменить знаки всех коэффициентов линейного преобразования (34.1) на противоположные, то фазы $\bar{Q}^*$, $\bar{U}_1$ и $\bar{P}_x^*$ изменятся на π и процесс, бывший устойчивым, может стать неустойчивым и т. д. Этот тип обратной связи является наиболее простым, он уже неоднократно встречался в предыдущих параграфах.

Второй тип обратной связи, по сути, близок к только что рассмотренному, он изображен на рис. 66, б. Звено 2 описывается таким же линейным преобразованием (34.1), как и звено 1, но отличается тем, что его коэффициенты являются комплексными и, в частности, могут зависеть от комплексной частоты колебаний β . Этот вид обратной связи может появиться тогда, когда физические процессы, лежащие в его основе, зависят не только от $\bar{p}$, $\bar{v}$ и $\bar{s}$, но и от других величин, например от их производных.

Ниже будет описан процесс горения, который существенным образом зависит от ускорения фронта пламени. Для него в линейное преобразование (34.1) пришлось бы ввести слагаемые, пропорциональные $\frac{d\bar{v}}{d\tau}$:

$$Q^* = a_{11}\bar{p} + a_{12}\bar{v} + a_{13}\bar{s} + a_{14}\frac{d\bar{v}}{d\tau}$$

и т. д.

Поскольку все параметры колебательной системы изменяются со временем пропорционально множителю $e^{\beta\tau}$, то $\frac{d\bar{v}}{d\tau} = \beta\bar{v}$ и линейное преобразование (34.1) приобретает вид

$$\bar{Q}^* = a_{11}\bar{p} + (a_{12} + a_{14}\beta)\bar{v} + a_{13}\bar{s}$$

и т. д.

Из написанного равенства сразу видно, что коэффициент при v стал комплексным и перестал быть постоянной — он зависит от β .

Физически второй тип обратной связи отличается, как и первый, мгновенным следованием за изменением составляющих выходной координаты ($\bar{p}$, $\bar{v}$, $\bar{s}$), но допускает при этом дополнительные фазовые сдвиги. Действительно, умножение v на комплексный коэффициент $(a_{12} - a_{14}\beta)$ означает не только изменение масштаба, но и поворот соответствующего слагаемого в комплексной плоскости.

Третий вид обратной связи изображен на рис. 66, в. В простейшем случае он состоит из двух последовательно расположенных звеньев — первого, совпадающего с только что рассмотренным звеном 2 (звено 1 может рассматриваться как частный случай звена 2), и звена 3, дающего временное запаздывание. Этот тип обратной связи реализуется тогда, когда процесс горения следует за изменением $\bar{p}$, v и $\bar{s}$ не мгновенно, а с некоторым запаздыванием. Пример такой обратной связи уже рассматривался в § 26. Простейший случай, изображенный на рис. 66, в, соответствует такому процессу, когда время запаздывания Δt может быть принято единым для всех составляющих соответствующего линейного преобразования типа (34.1). Лишь в этом случае звенья 2 и 3 можно расположить последовательно. Следует заметить, что обычно рассматриваются лишь такие процессы. Если бы возникла необходимость введения более одного времени запаздывания, например Δt_1 , Δt_2 и Δt_3 связанных соответственно с $\bar{p}$, $\bar{v}$ и $\bar{s}$, то это не привело бы к необходимости разрабатывать какие-либо новые методы расчета колебательной системы, а только увеличило бы вычислительные трудности. При учете запаздывания по схеме, изображенной на рис. 66, в, коэффициенты линейного преобразования (34.1) становятся, вообще говоря, комплексными, причем все они умножаются на один и тот же комплексный множитель $e^{-\beta\Delta t}$ (см. § 26), зависящий от времени запаздывания Δt .

Таким образом, различные типы обратной связи можно классифицировать по виду коэффициентов линейного преобразования (34.1). Если они содержат множителем $e^{-\beta\Delta t}$, то налицо обратная связь с запаздыванием, если они

комплексные, но не содержат времени запаздывания, то обратная связь характеризуется наличием дополнительных фазовых сдвигов; если они вещественные, то налицо простейший вид обратной связи. Конечно, эта классификация, так же как и предыдущая, является условной и неполной.

Сделаем в заключение настоящего параграфа несколько общих замечаний.

При описании различных видов обратной связи ниже принимается, что процесс колебаний близок к установившемуся, т. е. что система близка к границе устойчивости. Выше уже подчеркивалось, что при решении задачи без учета начальных условий надо допустить, что процесс колебаний происходит достаточно долго и что он в то же время не вышел (по амплитудам) за пределы, допускаемые линейной теорией. Это сразу ограничивает допустимые масштабы неустойчивости. Однако дело не только в таких формальных соображениях. Обычно наибольший интерес представляет механизм обратной связи, который поддерживает возникшие автоколебания. Описание его естественно вести для установившегося процесса колебаний. При таком подходе допускается, конечно, известная нестрогость в рассуждениях. Поскольку процесс автоколебаний установился, постольку явление стало существенно нелинейным и сделанные выше ссылки на свойства линейной колебательной системы нельзя признать достаточно убедительными. Однако, поставив себе целью лишь качественное описание, можно сделать предположение, что основные физические явления, приводящие к образованию обратной связи, могут быть одинаковыми как в период медленного нарастания колебаний (линейная колебательная система), так и тогда, когда колебания установились (в колебательной системе начали играть существенную роль нелинейные члены). Поэтому при анализе возможных механизмов обратной связи в дальнейшем всюду принимается, что колебания уже установились, и описывается цепь явлений, ведущих к поддержанию этих колебаний; при этом не делается разницы между двумя случаями — линейной системой, находящейся на границе устойчивости, и нелинейной системой в режиме установившихся автоколебаний.

§ 35. Механизмы обратной связи, имеющие в основе смесеобразование

В большинстве случаев различного рода топки, камеры сгорания двигателей и т. п. содержат в качестве одного из основных элементов устройства для подготовки горючей смеси. Нередко эти устройства выполняются в виде форсунок для распыла топлива перед зоной горения. Иногда применяются и другие конструкции. Какими бы ни были устройства для подготовки горючей смеси, если только они существуют, процесс смесеобразования может самым существенным образом сказаться на горении и, в частности, на возбуждении вибрационного горения. Проще всего это видно из таких соображений. Смесеобразование может характеризоваться известной неравномерностью. Если эта неравномерность будет к тому же иметь периодический характер, то в зону горения будет попадать смесь с периодически изменяющимся коэффициентом избытка воздуха или с периодически изменяющимся соотношением между горючим в жидкой и паровой фазе и т. п. Это может приводить как к появлению колеблющегося тепловыделения, так и к подвижности фронта пламени, а следовательно, к поддержанию колебаний. Подобный случай уже рассматривался в § 25. Однако упомянутый случай не исчерпывает всех возможностей и поэтому приведенные здесь общие соображения целесообразно несколько конкретизировать, описав более подробно типичные механизмы поддержания колебаний, связанные с процессом смесеобразования.

а) Неравномерная подача горючего. Если по каким-либо причинам горючее подается неравномерно, с известной периодичностью, то в результате возникает горение, которое тоже будет иметь периодический характер. Неравномерная подача горючего может быть связана с неравномерной работой помп или иных устройств, подающих горючее. Обычно такая неравномерность не бывает связана с акустическими колебаниями газов внутри топки или двигателя. Поэтому, если в результате и возникают колебания процесса горения, то их надо рассматривать как вынужденные колебания. В отличие от автоколебаний, частота которых определяется свой-

ствами колебательной системы, частота вынужденных колебаний определяется внешним воздействием, например числом оборотов помпы, подающей горючее, и т. д. Это обстоятельство позволяет легко отличать вынужденные колебания от автоколебаний и, если это необходимо, принимать меры к их подавлению. Очевидно, что борьба с вынужденными колебаниями такого типа должна вестись путем воздействия на внешние устройства, подающие горючее (изменение конструкции топливного насоса и т. п.). Здесь этот довольно простой вопрос более подробно рассматриваться не будет, так как он не относится к основному содержанию книги, посвященной автоколебательным явлениям.

Если ограничиться только теми случаями, когда переменный расход горючего непосредственно связан с акустическими колебаниями в газовом потоке, движущемся по двигателю или трубке, то одним из основных факторов, вызывающих такое взаимодействие, является влияние колебаний давления окружающей среды на расход топлива через форсунки.

Обозначим расход массы горючего на единицу площади сечения трубы, по которой течет воздух, через m_r . Как известно, расход жидкости через форсунку пропорционален корню квадратному из перепада давления на форсунке (разности давления подачи и давления в среде, в которой установлена форсунка)

$$m_r = k_1 \sqrt{p_r - p},$$

где k_1 — некоторый численный коэффициент, зависящий от размеров форсунки и т. п. факторов, p_r — давление жидкости на входе в форсунку, p — давление воздуха в трубе.

Поскольку при акустических колебаниях в трубе величина p будет иметь периодическую составляющую, расход горючего m_r тоже должен колебаться. Найдем колебательную составляющую расхода горючего:

$$\delta m_r = \frac{-k_1}{2\sqrt{p_r - p}} \delta p. \quad (35.1)$$

Из приведенной формулы видно, что колебательная составляющая расхода горючего будет сдвинута относи-

тельно колебательной составляющей давления окружающей среды на π .

Полученная формула описывает возмущение расхода горючего в сечении трубы, в котором установлены форсунки, причем величина δp тоже относится к этому сечению. Однако нередко плоскость расположения коллектора с форсунками и плоскость интенсивного теплоподвода (зона горения) разделены расстоянием, которым нельзя пренебрегать. Тогда связь между акустическими колебаниями и колебаниями количества горючего, которое попадает в зону горения, можно найти из следующих соображений (рис. 67). Пусть плоскость теплоподвода Σ расположена в сечении $\xi = 0$, а плоскости расположения форсунок Φ отвечает координата $\xi = \xi_\Phi$. Пусть, далее, колебания характеризуются частотой ω и амплитудами возмущений скорости и давления слева на плоскости Σ δv_0 и δp_0 . Входящее в формулу (35.1) возмущение $\delta p = \delta p_\Phi$ легко представить на основании равенств (4.8) и (4.13) в виде

$$\delta p_\Phi = \left[\frac{\kappa p_1}{a_1} \varphi_2(\xi_\Phi; \omega) \delta v_0 + \varphi_1(\xi_\Phi; \omega) \delta p_0 \right] e^{i\omega\tau}.$$

Колебания давления δp_Φ вызывают колебания расхода горючего в сечении ξ_Φ , а процесс горения происходит при $\xi = 0$. Следовательно, надо учесть еще время переноса горючего потоком на расстояние ξ_Φ . Очевидно, это время после приведения его к безразмерному виду будет равно

$$\tau_\Phi = -\frac{\xi_\Phi}{M_1}$$

($\tau_\Phi > 0$, так как $\xi_\Phi < 0$). Следовательно, до плоскости Σ возмущение количества горючего в потоке будет доходить с запаздыванием, равным τ_Φ . Если предположить, что, пересекая плоскость Σ , горючее сгорает мгновенно, с постоянной полнотой сгорания, т. е.¹⁾

$$\bar{Q}^* = k_2 \delta m_r,$$

¹⁾ Ниже $\bar{Q}^*$ является сокращенной записью эффективного возмущения теплоподвода $\bar{Q}_0^*$ (46.14).

то

$$\bar{Q}^* = - \frac{k}{2 \sqrt{p_1 - p}} \left[\frac{\kappa p_1}{a_1} \varphi_2(\xi_\Phi; \omega) \delta v_0 + \right. \\ \left. + \varphi_1(\xi_\Phi; \omega) \delta p_0 \right] e^{i\omega \left(\tau + \frac{\xi_\Phi}{u_1} \right)}, \quad (35.2)$$

где $k = k_1 k_2$.

Полученная формула позволяет сделать следующие замечания. Прежде всего видно, что в колебательной

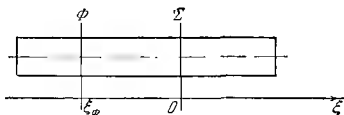


Рис. 67. Положение сечений ввода горючего (Φ) и сгорания (Σ) по длине трубы.

системе действует обратная связь — акустические колебания в зоне горения Σ с амплитудами δv_0 и δp_0 вызывают возмущение тепловыделения в этой же зоне, равное $\bar{Q}^*$. Как известно из предыдущего, если при этом выполняются необходимые амплитудно-фазовые соотношения между $\bar{Q}^*$, с одной стороны, и δp_0 , δv_0 , — с другой, то система может возбудиться. Формула (35.2) была получена в предположении, что эти амплитудно-фазовые соотношения реализованы, система находится на границе устойчивости и поэтому $\beta = i\omega$. По своему характеру полученная обратная связь соответствует третьему виду обратной связи, рассмотренному в предыдущем параграфе, — обратной связи с запаздыванием.

Для того чтобы выявить некоторые свойства изучаемого механизма возбуждения, полезно мысленно разомкнуть автоколебательную систему и рассмотреть ее с несколько необычной точки зрения. Пусть существуют установившиеся акустические колебания. Проследим за тем, какие значения принимает $\bar{Q}^*$; при этом не будем пока требовать, чтобы полученные значения $\bar{Q}^*$ были (по фазе

и амплитуде) именно такими, какие способны поддерживать акустические колебания, существование которых предположено. Если обратиться к рис. 66, то это соответствует размыканию пзображенных схем в точке А, подаче на вход колебательной системы в третьей схеме периодически меняющегося $\bar{Q}^*$ (например, от некоторого внешнего источника), которое поддерживает рассматриваемый режим установившихся колебаний, и анализу вопроса о том, какое Q^* будет получаться в результате действия механизма обратной связи на выходе пз звена 3. Если эти Q^* совпадут, значит, замкнутая система будет совершать колебания рассмотренного типа, если они будут различными, то система не будет совершать установившихся колебаний; колебания будут либо демпфироваться, либо происходить с возрастающей амплитудой.

Рассматривая с этой точки зрения формулу (35.2), зададим ω , δv_0 и δp_0 , т. е. весь процесс акустических колебаний, и проанализируем в разомкнутой системе влияние ξ_Φ на $\bar{Q}^*$. Влияние ξ_Φ на выражение, стоящее в прямых скобках, обычно несущественно. При изменении ξ_Φ в разумных пределах это выражение несколько изменяется по абсолютной величине и практически не изменяет своей фазы. Об этом уже говорилось в § 6 при рассмотрении эмпор стоячих волн колебаний. Другое дело множитель $\exp i\omega \left(\tau - \frac{\xi_\Phi}{M_1} \right)$. При малых M_1 (а это как раз и является обычным случаем) даже незначительное изменение ξ_Φ будет приводить к большому фазовому сдвигу $\bar{Q}^*$ относительно заданных δp_0 и δv_0 . Действительно, элементарный расчет показывает, что смещение коллектора с форсунками на 5—10% общей длины трубы ($\Delta \xi_\Phi$ 0,05—0,1) изменяет фазу $\bar{Q}^*$ на $\frac{\pi}{2}$ и более. Следовательно, малым смещением коллектора по длине трубы можно добиться существенного фазового сдвига $\bar{Q}^*$. Но тогда открывается, казалось бы, такая возможность борьбы с автоколебаниями. В случае, если действительно реализована обратная связь описанного здесь типа, достаточно незначительного смещения коллектора с форсунками по длине трубы, чтобы резко изменить фазу $\bar{Q}^*$. Выше (см. гл. V) уже гово-

рилось, что при должном фазовом сдвиге между $\dot{Q}^*$ и δp_0 , δv_0 возбуждение вообще невозможно, поэтому, подобрав на опыте положение коллектора относительно зоны горения, можно подавить вибрационное горение.

К сожалению, дело обстоит не так просто. Свойства акустической системы, возбуждаемой горением, сложнее описанных здесь наглядных схем. Они будут подробно рассмотрены в гл. IX.

Влияние колебаний давления в камере сгорания на расход топлива может оказаться существенным в жидкостных реактивных двигателях, поскольку колебания давления могут достигать в них достаточно больших величин. При этом задача упрощается в том отношении, что зона теплоподвода непосредственно прилегает к головке камеры сгорания, и, следовательно, можно полагать $\xi_{\text{ф}} = 0$. Более подробное рассмотрение показывает, однако, что само по себе наличие колебаний расхода, вызванных колебаниями давления в камере такого двигателя, недостаточно для самовозбуждения системы. Действительно, при увеличении давления расход горючего будет уменьшаться. Если предположить, что сгорание происходит мгновенно, то получится, что увеличение теплоподвода будет происходить в моменты понижения давления и система не возбуждётся. В этом рассуждении скрыто молчаливое предположение, что система может стать неустойчивой только за счет колебаний теплоподвода. Но в данном случае это не так. Как будет показано в гл. X, главным в этом случае является возмущение газообразования.

Для того чтобы система возбудилась, надо изменить фазу газообразования, которая совпадает с фазой горения, относительно фазы p . Такое изменение возможно, если в системе существует запаздывание процесса воспламенения смеси. Подробнее об этом см. § 37 настоящей главы.

Еще более существенными являются, по-видимому, колебания расхода горючего в устройствах с малонапорными системами подачи горючего, например, в пылеугольных топках. В них угольная пыль подается током так называемого первичного воздуха через специальное устройство (лопаточную горелку) в зону горения в предтопке, куда подается и вторичный воздух. Если в таком

предтопке возникнет вибрационное горение, то сечение, в котором расположены устройства, подающие угольную пыль, может рассматриваться, в первом приближении, как закрытый конец трубы. При колебаниях в нем образуется пучность давления, и поэтому подаваемая первичным воздухом угольная пыль будет испытывать периодически меняющееся противодавление на выходе. Колебательная составляющая противодавления, которая может реализоваться при вибрационном горении, имеет тот же порядок, что и избыточное (против предтопка) давление подачи первичного воздуха, т. е. в моменты достижения максимального давления в предтопке подача пыли может почти полностью прекращаться.

Хотя такой механизм обратной связи должен быть весьма мощным, сам по себе он не способен возбудить колебательную систему — фазе наибольшей подачи топлива будет соответствовать фаза наименьшего давления в предтопке. Однако реально существующие запаздывания (задержки воспламенения), о которых будет идти речь в § 37, позволяют реализоваться нужным фазовым соотношениям между возмущениями теплоподвода и давления.

В заключение следует еще добавить, что иногда может оказаться необходимым рассмотреть более сложную колебательную систему, чем это делается здесь. Колебания противодавления могут вызвать акустические колебания в подводящих пыль пылепроводах (или в топливных магистралях двигателей), и тогда появится необходимость изучения совокупных колебаний среды в основной трубе (предтопок, камера сгорания двигателя) и в подводящих топливо трубопроводах.

б) Колеблющийся расход воздуха. Вернемся к рассмотрению вопроса о возбуждении вибрационного горения в трубе, по которой течет воздух и в которой расположен коллектор с форсунками, подающими жидкое горючее. Выше уже говорилось о принципиальной возможности возникновения обратной связи в результате влияния колеблющегося в потоке давления на расход горючего. Однако реализация этого механизма практически невероятна вследствие слабой зависимости расхода через форсунки со значительным давлением подачи от акустических колебаний среды. Возможен, однако, в известном смысле

противоположный механизм обратной связи. Предположим, что расход горючего строго постоянен. Тогда воздух, обтекающий коллектор с форсунками, будет уносить с собою одно и то же количество горючего в единицу времени, вне зависимости от мгновенного значения давления и скорости потока в сечении, в котором расположены форсунки.

Если количество уносимого горючего и будет постоянным, то коэффициент избытка воздуха может претерпевать существенные колебания, вследствие колебания расхода воздуха в сечении, в котором расположены форсунки. Действительно, коэффициент избытка воздуха

$$\alpha = \frac{qv}{L_0 m_f}$$

где L_0 — отношение массы воздуха, теоретически необходимой для полного сгорания единицы массы топлива, к последней.

В результате акустических колебаний расход воздуха через единичную площадку поперечного сечения потока qv будет также колебаться. Это приведет к возмущению коэффициента α :

$$\delta\alpha = \frac{1}{L_0 m_f} (v\delta q + q\delta v) = \alpha \left(\bar{q} + \frac{1}{M_1} v \right)$$

(α в правой части равенства соответствует невозмущенному значению коэффициента избытка воздуха).

Анализ возможных значений величин $\bar{q}$ и v показывает, что первая из них, связанная с возмущением давления, обычно невелика. В открытой трубе с дозвуковым течением давление может колебаться лишь на малые доли атмосферы, поэтому величина $\bar{q} = \frac{1}{\alpha} \frac{\delta p}{p}$ (равенство написано для изэнтропического течения газа) не может превышать 0,05 — 0,15. В то же время слагаемое $\frac{v}{M_1}$ может достигать величин порядка единицы. (Это происходит тогда, когда колебательная составляющая скорости близка к средней скорости течения. Как будет видно из следующих глав, такой масштаб колебаний следует признать обычным.)

Таким образом, в первом приближении можно написать:

$$\delta\alpha = \alpha \frac{\bar{v}}{M}, \quad (35.3)$$

показав тем самым, что α колеблется в фазе с $\bar{v}$. Повторяя почти дословно вывод, приведенный в настоящем параграфе при рассмотрении зависимости δm_T от $\delta\rho$, можно написать:

$$\delta\alpha = \frac{\alpha}{M_1} [\varphi_1(\omega; \xi_\Phi) \bar{v}_0 + \varphi_2(\omega; \xi_\Phi) \bar{p}_0] e^{i\omega(\tau + \frac{\xi_\Phi}{M_1})}. \quad (35.4)$$

Необходимая связь между колебаниями α и колебаниями теплоподвода $\bar{Q}^*$ или скорости распространения пламени $\bar{U}$, легко получается, если учесть (об этом уже говорилось в гл. V), что полнота сгорания (точно так же как и скорость распространения пламени) может существенно зависеть от α . Тогда, ограничиваясь, для определенности, влиянием α на полноту сгорания, напишем:

$$Q^* = \text{const} \frac{d\eta_{\text{сг}}}{d\alpha} \delta\alpha. \quad (35.5)$$

Формулы (35.4) и (35.5) в совокупности указывают, что и в этом случае имеет место обратная связь с запаздыванием, существенно зависящим от ξ_Φ . Необходимо подчеркнуть, что, в отличие от предыдущего случая, рассмотренный механизм обратной связи может играть заметную роль при возбуждении акустических колебаний в трубах, в которых сгорает распыленное жидкое горючее. Казалось бы, что тогда путем незначительных смещений коллектора можно подобрать такое его положение, при котором колебания были бы подавленными. Однако и в этом случае по причинам, которые будут изложены ниже, такой метод борьбы с вибрационным горением оказывается малоэффективным.

в) Колебания качества распыла. Вследствие того, что при акустических колебаниях появляются периодические составляющие у скорости и давления, происходит периодическое изменение и скорости напора потока $qv^2/2$. Как известно, при работе форсунки в потоке воздуха траектории движения капель распыленного топлива (дальность брызгания форсунки), тонкость распыла и пыле связанные

со смесеобразованием параметры (в частности, испарение) в сильной степени зависят от скоростного панора набегающего на форсунку течения. Поэтому качество распыла также меняется периодически, строго следуя за акустическими колебаниями в потоке. В результате в зону горения поступает смесь горючего с воздухом, которая имеет периодически изменяющееся качество. Это приводит к тому, что в процессе горения реализуются отличные от нуля колебательные составляющие эффективного возмущенного теплоподвода Q^* и эффективной возмущенной скорости распространения пламени $\bar{U}_1$, т. е. смогут поддерживаться автоколебания системы. Особенно заметную роль описанный механизм обратной связи может играть при условии, что периодически изменяющееся качество смеси оказывается во взаимодействии с важными конструктивными элементами камеры сгорания. Мыслимы, например, случаи, когда колеблющиеся траектории полета капель горючего то направляются непосредственно на стабилизатор, то попадают в струи воздуха, движущиеся на известном расстоянии от стабилизатора, или периодически попадают на стенки камеры сгорания. Во всех этих и подобных случаях колебание качества распыла должно сказываться наиболее сильно, поскольку оно непосредственно влияет на самые ответственные участки камеры сгорания.

Если такой механизм обратной связи реализован, то может оказаться полезным изменить взаимное положение элементов топливного коллектора и элементов камеры сгорания. Эти изменения приходится производить чисто эмпирически, так как подробное изучение взаимосвязи нестационарного смесеобразования с нестационарным горением является еще далеко не решенной проблемой, требующей очень глубокой теоретической проработки и тонкого эксперимента.

Если поставить более скромную задачу: дать внешнее описание рассматриваемого явления с целью получения формул, связывающих $\bar{Q}^*$ и $\bar{U}_1$ с $\bar{p}_0$ и $\bar{v}_0$, то после введения какой-либо правдоподобной гипотезы о связи колебаний дальности форсунок или качества распыла с процессом горения можно получить формулы того же типа, что

и приведенные выше (35.2), (35.4) и (35.5). Здесь, так же как и в предыдущих случаях при $\xi_{\text{ф}} \neq 0$, получится обратная связь с запаздыванием.

Если просуммировать сказанное в настоящем параграфе, то следует прежде всего указать на то, что даже небольшое число приведенных примеров дает возможность утверждать, что процесс смесеобразования может явиться основой для возникновения целого ряда механизмов обратной связи. Совершенно ясно, что описанные выше отдельные механизмы — связанные с меняющейся подачей горючего, с изменением коэффициента избытка воздуха, с качеством распыла горючего — чаще всего должны выступать в единстве, как различные стороны одного и того же процесса возмущенного смесеобразования. Конечно, это не значит, что какая-либо сторона рассмотренного процесса не может играть в каком-то конкретном случае ведущей роли; это именно и оправдывает описание различных сторон единого процесса возмущенного смесеобразования в качестве независимых механизмов обратной связи. Общим свойством всех этих механизмов является наличие запаздывания, связанного со временем, которое необходимо потоку, чтобы донести распыленное горючее до зоны горения. Это запаздывание становится равным нулю только в том случае, если горючее подается непосредственно в зону горения.

§ 36. Механизмы обратной связи, имеющие в основе гидромеханические явления

Если бы смесеобразование было единственным процессом, способным обеспечить реализацию некоторого механизма обратной связи, то с вибрационным горением было бы чрезвычайно просто бороться. Достаточно было бы готовить горючую смесь в отдельном ресивере, акустически изолированном от камеры сгорания, чтобы вибрационное горение никогда не возникало. Однако прямые опыты опровергают это. Были, например, поставлены эксперименты по возбуждению вибрационного горения в трубе, которая обдувалась не воздухом, а заранее подготовленной смесью бензина с воздухом. Эта смесь готовилась в отдельном ресивере, опытная установка была выполнена

по схеме, близкой к той, которая приведена на рис. 60. Разрыв между трубой, в которой располагалась зона горения, и соплом, подающим бензо-воздушную смесь, превышал калибр трубы. К тому же подающая смесь труба имела больший диаметр, чем труба, в которой располагалась камера сгорания. Все это приводило к тому, что колебания, происходящие в трубе с камерой сгорания, никак не передавались в ресивер, в котором были расположены форсунки и готовилась смесь. Это обстоятельство было подтверждено прямыми замерами колебаний давления в ресивере. Таким образом, полностью исключалось возможное взаимодействие акустических колебаний в трубе со смесеобразованием, идущим в ресивере. И все же вибрационное горение возникло. Приведенные на рис. 51 результаты опытов были получены на такой именно установке.

Отсюда следует, что помимо смесеобразования могут существовать какие-то другие процессы, которые дают возможность образоваться обратной связи. Ряд этих процессов можно объединить по тому признаку, что все они связаны с гидродинамическими процессами в движущемся по трубе газе. В основе этой группы механизмов обратной связи лежит то, что возникающие при горении акустические колебания существенно изменяют характер течения, сообщая ему периодическую составляющую. Чтобы придать этому общему утверждению известную наглядность, приведем здесь результаты одного эксперимента.

В лабораторной установке, на которой изучались некоторые вопросы вибрационного горения, использовался термоанемометр, позволяющий записывать мгновенные значения скорости потока. Этот термоанемометр был установлен перед зоной горения. При установившемся вибрационном горении (даже малой интенсивности) амплитуда и период колебаний скорости потока становились строго постоянными, причем наблюдавшиеся до этого турбулентные пульсации скорости как бы «исчезали» на фоне четких колебаний, имевших акустическую природу. Две осциллограммы — одна соответствующая нормальному горению, другая вибрационному — приведены на рис. 68. Следует добавить, что при перемещении термоанемометра по диаметру трубы амплитуда колебаний

скорости не изменялась сколько-нибудь заметным образом, т. е. поток воздуха колебался как целое. Такие упорядоченные колебания больших масс газа способны, конечно, существенным образом повлиять на характер течения, в частности на вихреобразование в потоке.

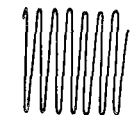


Рис. 68. Осциллограммы колебаний скорости перед зоной сгорания: вверху нормальное горение, внизу — режим вибрационного горения.

а) Вихреобразование перед зоной горения. В участках двигателя или тонки, предшествующих зоне горения, практически всегда присутствуют элементы, дающие возможность возникнуть заметному вихреобразованию. Таким элементом может явиться крутой поворот оси течения, расширяющийся участок трубопровода, достаточно резкое изменение площади трубопровода, наконец, просто присутствие плохо обтекаемого элемента конструкции внутри трубы. При нормальном режиме работы камеры сгорания вихреобразование во всех этих случаях будет происходить по обычным законам гидромеханики. Если же возникает вибрационное горение, то на основное движение потока окажется наложенным упорядоченное колебательное изменение скорости течения и тогда вихреобразование будет происходить не при обычном обтекании твердых тел потоком, а при обтекании их потоком, скорость которого имеет заметную и упорядоченную периодическую составляющую.

Вихреобразование связано с вязкостью жидкости, а теория течения вязкой жидкости составляет один из очень сложных и еще далеко не разработанных отделов гидромеханики. Тем более это относится к вопросу об обтекании твердых тел потоком, скорость которого имеет периодическую составляющую. Хотя теория этого процесса, по существу, отсутствует, известны работы экспериментального характера, посвященные близким вопросам, в частности вопросам обтекания вязкой жидкостью колеблющихся твердых тел (например, работы, посвященные взаимодействию вихреобразования за фабричными труба-

ми при ветре с собственными колебаниями этих труб). В этих работах показано, что при колебаниях твердого тела с определенной частотой частота срывов вихрей может перестроиться и стать равной этой «задающей» частоте. Важно при этом отметить, что и само вихреобразование становится в этом случае более мощным.

Естественно поэтому предположить, что если возникло вибрационное горение, то в результате колебаний воздушного потока около неподвижных твердых тел вихреобразование перед зоной горения может перестроиться и начать происходить с частотой акустических колебаний.

Этому могут способствовать и колебания давления. Приведенные во второй главе эпюры стоячих волн давления показывают, что в участках, отдаленных от пучности давления, существует отличный от нуля градиент давления, взятый вдоль оси течения. Из теории течения вязкой жидкости известно, что наличие в потоке градиента статического давления определенного знака может приводить к отрыву потока от стенок вследствие влияния этого градиента на течение жидкости в пограничном слое. Не вдаваясь в подробности, связанные с этим вопросом, укажем лишь, что во время акустических колебаний градиент статического давления будет периодически меняться, изменяя, в частности, и свой знак каждые полупериода. Поэтому, грубо говоря, в течение каждого периода колебаний будет существовать момент, когда отрыв пограничного слоя (т. е. образование вихря) будет особенно вероятен.

Таким образом, не только колебания скорости потока, но и колебания давления будут способствовать вихреобразованию с периодом, равным периоду акустических колебаний.

Можно, наконец, привести пример возбуждения акустических колебаний в аэродинамической трубе, подробно исследованный С. П. Стрелковым, Г. А. Бендриковым и Н. А. Смирновым¹⁾. Не приводя описания этого литературного исследования, укажем лишь, что существенную

¹⁾ Стрелков С. П., Бендриков Г. А., Смирнов Н. А., Пульсации в аэродинамических трубах и способы демпфирования их, Труды ЦАГИ, № 593, 1946.

роль в процессе автоколебаний играло периодическое образование кольцевого вихря под действием акустических колебаний.

Таким образом, ряд косвенных экспериментальных данных и теоретические соображения общего характера указывают на то, что за теми элементами конструкции двигателя или топки, которые допускают заметное вихреобразование, при акустических колебаниях в потоке

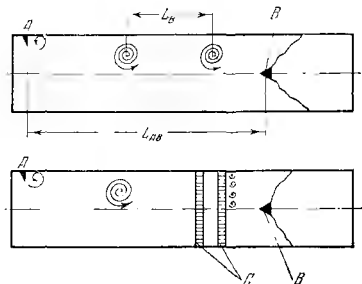


Рис. 69. Схема вихреобразования перед зоной горения.

могут срываться мощные вихри с периодом, равным периоду акустических колебаний.

Предположим, что эта возможность реализована, и проследим, каким образом это приводит к замыканию обратной связи при вибрационном горении. На рис. 69, в верхней его части, дано схематическое изображение обсуждаемого явления. В холодной части трубы, в точке А, расположено место срыва потока и образования вихря. На схеме это плохо обтекаемый козырек. На самом деле, как уже указывалось выше, это может быть место поворота течения или область течения в расширяющемся канале и т. д. Образовавшиеся в точке А вихри сносятся потоком в сторону зоны горения. Пусть период акустических колебаний будет T . Тогда при скорости течения v_1

расстояние между вихрями будет $L_B = v_1 T$. Если считать, что на участке от козырька A до стабилизатора B скорость течения не меняется, то подходящие к зоне горения вихри будут периодически (с периодом, равным $\frac{L_B}{v_1}$) вступать во взаимодействие с фронтом пламени, удерживаемым стабилизатором. Это и приведет к замыканию обратной связи. Действительно, пусть существуют акустические колебания, которые приводят к образованию цепочки вихрей, движущихся к зоне горения. Подходя к фронту пламени, каждый вихрь деформирует его, а следовательно, фронт пламени будет испытывать периодические деформации. В гл. IV уже было показано, что периодическое перемещение фронта пламени внутри зоны горения эквивалентно существованию отличной от нуля амплитуды колебаний эффективной скорости распространения пламени $\bar{U}_1$, что само по себе способно возбудить систему (или поддерживать возникшие автоколебания), если выполняются соответствующим образом амплитудно-фазовые соотношения. Следовательно, если в точке A образуется достаточно мощный вихрь, который срывается и начинает двигаться вместе с потоком в такой момент времени, чтобы прийти к фронту пламени и деформировать его в должной фазе акустических колебаний, то колебательная система возбуждается.

Борьба с вибрационным горением, происходящим по этой схеме, мыслима двумя различными методами. С одной стороны, положительный эффект можно ожидать в том случае, если изменить фазу отрыва вихря, с другой, — если уменьшить его размеры. Что касается первого пути, то надо сразу сказать, что воздействовать на фазу такого сложного явления, как отрыв вихря, очень трудно. Если же пойти по второму пути, то простое конструктивное мероприятие — установка спрямляющих решеток на пути следования вихря — может оказать существенное воздействие на процесс вибрационного горения. Спрямляющие решетки употребляются, как известно, в тех случаях, когда оказывается необходимым «успокоить» течение, придать всем его струйкам направление, параллельное стенкам трубы. Эти решетки представляют собою набор тонких пластин, обычно пересекающихся под прямым

углом, установленных в каком-либо сечении трубы так, чтобы плоскости пластинок были параллельны оси течения. Обычно оказывается достаточным установить последовательно две такие решетки на некотором расстоянии друг от друга. Решетки эти могут обладать малым гидравлическим сопротивлением и не менять сколько-нибудь существенным образом характер течения, если не считать его «успокоения». Действие этих решеток сводится к тому, что большой вихрь, пройдя сквозь такую решетку, как бы разрезается на много маленьких вихрей. В результате к зоне горения вместо одного мощного вихря, способного сильно деформировать поверхность фронта пламени, подходит совокупность большого числа мелких вихрей, которые воздействуют на пламя не как фактор, деформирующий его поверхность, а просто как поток несколько повышенной турбулентности. Хотя процесс горения и зависит от турбулентности набегающего потока, эта зависимость не может идти ни в какое сравнение с мощными искажениями конфигурации фронта пламени большими вихрями. В нижней части рис. 69 дана схема течения при установке перед зоной горения спрямляющих решеток С.

Высказанные здесь общие соображения были подтверждены специальными экспериментами. Схема экспериментальной установки по существу изображена на рис. 69. Труба, в которой была расположена камера сгорания, обдувалась свободным потоком. Входная часть этой трубы допускала возникновение мощных вихрей. Для того чтобы разорвать возникающую при этом связь между процессами вихреобразования и горения, в сечениях, близких к зоне горения, были установлены две спрямляющие решетки. Опыты заключались в том, что изучался процесс горения (с точки зрения возможности возбуждения вибрационного сгорания) со спрямляющими решетками и без них. При постепенном увеличении подачи горючего (уменьшении коэффициента избытка воздуха α) наблюдалось изменение характера колебаний.

Предварительно было определено влияние спрямляющих решеток на степень завихренности воздушного течения перед зоной сгорания. Это производилось следующим образом. При холодной продувке установки, путем дрос-

сепирования выходного сечения трубы, получался тот же расход воздуха через установку, что и расход, который наблюдается при горении. Затем в сечении, лежащем за второй спрямляющей решеткой, при помощи термоанометра определялась степень завихренности течения. Здесь следует оговориться, что термин «завихренность»

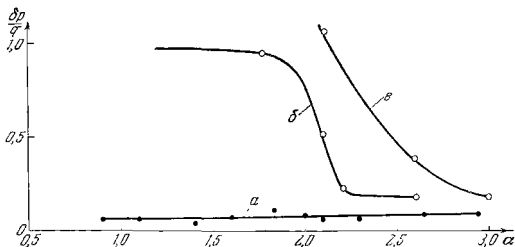


Рис. 70. Влияние вихреобразования перед зоной горения на склонность системы к возбуждению.

применяется в настоящей книге для обозначения турбулентности большого масштаба, образовавшейся в результате срыва больших вихрей в участках трубопровода, лежащих перед камерой сгорания.

Результаты измерения колебаний скорости дали степень завихренности без спрямляющих решеток 70%, при установке спрямляющих решеток — 20%. Относительно приведенных здесь численных данных надо заметить следующее. Применявшийся в опытах термоанометр не был приспособлен для замера столь интенсивной турбулентности. Поэтому приводимые здесь численные данные следует рассматривать как качественную характеристику степени завихренности потока. Они не оставляют сомнения в том, что установка решеток заметным образом уменьшает степень завихренности потока.

Результаты опытов приведены на рис. 70, на котором даны амплитуды колебаний давления перед зоной сгорания δp в зависимости от коэффициента избытка воздуха.

Кривая *a* характеризует работу установки при наличии спрямляющих решеток, кривая *в* — без них. Как видно из экспериментально полученных кривых, установка спрямляющих решеток ликвидирует мощное вибрационное горение ($\frac{\delta p}{q} \cong 1$) и сводит колебания давления к нормальному уровню ($\frac{\delta p}{q} < 0,1$). При этом осциллограммы зафиксировали разный характер самих колебаний. При вибрационном горении (кривая *в*) колебания носили совершенно четкий и регулярный характер, при нормальном горении (кривая *a*) наблюдался сложный и неопределенный спектр частот.

Таким образом, в описанном опыте (и ряде других) совершенно ясно сказалось благотворное влияние разрыва связи между вихреобразованием перед зоной горения и процессом сгорания.

Конечно, установка спрямляющих решеток не является единственным способом разрыва этой связи. Если вихреобразование обязано своим возникновением наличию плохо обтекаемого тела во входных участках, то тот же эффект может быть достигнут удалением этого тела или приданием ему удобообтекаемой формы. Важность таких мероприятий иллюстрирует кривая *б* на рис. 70. Эта кривая соответствует опытной установке со спрямляющими решетками, отличающейся тем, что за решетками на стенках трубы располагались (из конструктивных соображений) бабышки в форме параллелепипедов. Когда им была придана удобообтекаемая форма, вибрационное горение прекратилось и относительные амплитуды колебания давления упали до допустимого уровня $\frac{\delta p}{q} \cong 0,1$.

Надо сказать, что общих, стандартных средств борьбы с вибрационным горением, возникшим в связи с вихреобразованием в холодной части течения, не существует. В каждом конкретном случае надо находить источник этого вихреобразования и принимать соответствующие меры. Иногда это будет установка решеток или придание удобообтекаемой формы телам, в других случаях это может быть установка направляющих устройств (например, направляющих лопаток на участках крутого поворота

течения), отсос пограничного слоя или другие меры, хорошо разработанные экспериментальной аэродинамикой.

При желании представить рассмотренный механизм обратной связи в виде аналитических зависимостей возникают известные трудности. Они связаны с недостаточной разработкой вопросов вихреобразования и отсутствием количественных данных о влиянии приносимого в зону горения вихря на изменение конфигурации фронта пламени.

Если этими данными задаться (или, изучив обсуждаемое явление экспериментально, воспользоваться опытными данными), то дальнейший путь совершенно очевиден. Движение цепочки вихрей через фронт пламени приведет к периодическому изменению объема горячих газов в зоне горения σ , и в соответствии с результатами § 16 можно будет написать:

$$\bar{U}_1 = \frac{-1}{a_1 F} \frac{\partial}{\partial t} V_\sigma(t) - \bar{v}_1, \quad (36.1)$$

где, как известно, $V_\sigma(t)$ — объем зоны σ , занятый продуктами сгорания, а F — площадь сечения потока.

Расстояние между фронтом пламени и местом образования вихрей L_{AB} (рис. 69) позволит связать фазу отрыва вихря с фазой соприкосновения его с фронтом пламени аналогично тому, как это делалось в § 35, путем введения множителя $\exp i\omega \left(\tau - \frac{L_{AB}}{LM_1} \right)$.

В результате нетрудно получить формулы того же типа, что и формула (35.2), например:

$$U_1 = C \left[\varphi_1 \left(\omega; \frac{L_{AB}}{L} \right) v_0 + \varphi_2 \left(\omega; \frac{L_{AB}}{L} \right) p_0 \right] \exp i\omega \left(\tau - \frac{L_{AB}}{LM_1} \right). \quad (36.2)$$

Последняя формула написана в предположении, что отрыв вихря связан с колебаниями скорости в точке A , постоянная C включает численную характеристику отрывающегося вихря (его фазу и амплитуду, которая считается пропорциональной возмущению $\bar{v}_1$ в точке A). Как видно из (36.2), и в этом случае возникает обратная связь с запаздыванием.

б) Вихреобразование в зоне горения. Другим явлением, которое тоже связано с гидромеханикой плохо обтекаемых тел и тоже может стать механизмом обратной связи, является вихреобразование за стабилизаторами пламени. Как известно, для непрерывного поджигания горючей смеси, движущейся по трубе, применяются различного рода поджигающие устройства, простейшим типом которых является плохо обтекаемое тело (например, конус, свернутый из листового металла и поставленный вершиной

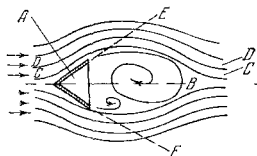


Рис. 71. Схема течения за плохо обтекаемым стабилизатором пламени.

навстречу течению), зона обратных токов которого служит непрерывно действующим источником поджигания. Схематически такой стабилизатор показан на рис. 71. Горючая смесь падегает на стабилизатор *A*, в аэродинамической «тени» которого существует область *AB* заторможенного течения; в ней периодически обра-

зуются вихри, сносимые дальше обтекающим стабилизатором потоком. В этой зоне обратных токов скорости невелики, и поэтому процесс сгорания происходит в благоприятных условиях. Ближайшая к зоне обратных токов струя *CC* находится в течение сравнительно длительного времени в контакте с горячими газами зоны за стабилизатором, она успевает прогреться и пачать гореть. Затем пламя перекладывается в следующую струю *DD* и т. д.

При нормальном горении процесс вихреобразования за стабилизатором подчиняется обычным закономерностям и в общем его характер не зависит от того, происходит обтекание стабилизатора холодным воздухом или горючей смесью, которая сгорает за ним. При этом фронт пламени за стабилизатором имеет характер несколько подвижного, хаотически деформирующегося конуса, со средним положением фронта пламени вдоль линий *AE* и *AF*.

Совершенно другой характер принимает процесс горения за стабилизатором в тех случаях, когда возникает вибрационное сгорание. Акустические колебания по тем

же причинам, которые излагались несколько выше, как бы навязывают свою частоту вихреобразованию за стабилизатором, причем размеры вихрей, срывающихся из области, лежащей за стабилизатором, заметно увеличиваются. Этот процесс вступает во взаимодействие с горением в зоне обратных токов и дает качественно новую картину всего явления.

Вместо существования более или менее стабильного конусообразного фронта пламени за стабилизатором наблюдается четкий периодический процесс. Постепенное увеличение горящего за стабилизатором моля после достижения им некоторого критического размера прекращается и происходит отрыв этого моля и снос его потоком. В этот момент горение за стабилизатором как бы затухает, однако сохранившийся за ним начальный очаг пламени дает возможность возобновиться горению, горящий объем все более увеличивается, продолжая «держаться» за стабилизатор, с тем, чтобы по достижении критического размера вновь оторваться от стабилизатора и начать движение вместе с потоком. Совершенно ясно, что этот

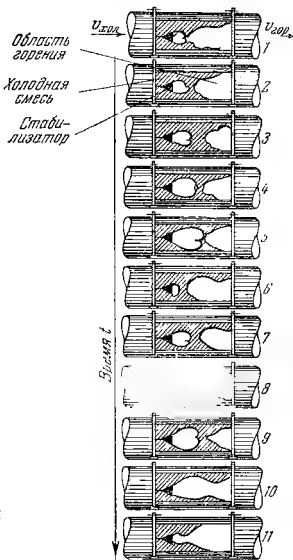


Рис. 72. Вихреобразование за коническим стабилизатором при вибрационном горении (скоростная киносъемка).

перiodический срыв горящих молей со стабилизатора является срывом вихрей, в которых (по мере их роста) процесс горения охватывает все большие и большие массы горючей смеси.

Описанное здесь явление было зафиксировано скоростной киносъёмкой картины горения за одиночным коническим стабилизатором через прозрачное окно, вделанное в стенку цилиндрической трубы диаметром 200 мм, в которой изучалось вибрационное горение. Последователь-

ность наиболее характерных кадров, запечатленных киносъёмкой, приведена на рис. 72. Следует заметить, что в этих опытах в горючую подмешивались малые количества специального вещества, сообщавшего пламени свойства яркого свечения.

Чтобы показать, что частота срыва горящих молей (частота вихреобразования) совпадает с частотой акусти-

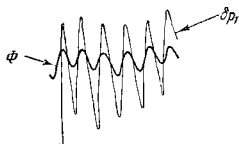


Рис. 73. Осциллограмма записи колебаний давления δp_1 и светимости зоны сгорания Φ при вибрационном горении.

ческих колебаний, в тех же опытах производилась одновременно запись на шлейфовый осциллограф колебаний двух величин — давления и светимости пламени в зоне горения. Установленный на должном расстоянии от кварцевого стекла фотодатчик позволял записывать интегральную светимость зоны горения, которая была пропорциональна видимой площади горящих молей. Поэтому периодические отрывы горящих молей от стабилизатора и их постоянное возобновление, показанное на рис. 72, должно было привести к периодическому изменению показаний фотодатчика. Соответствующие записи на ленте осциллографа приведены на рис. 73. Легко видеть, что частоты колебаний светимости и давления полностью совпадают, что подтверждает факт перестройки процесса вихреобразования и горения на акустическую частоту.

Если обратиться к математическому описанию этого типа возмущений процесса горения, то совершенно очевидно, что в зоне σ будет происходить периодическое изменение объема, занятого горящими газами. Это приведет, как

и в предыдущем случае, к появлению отличной от нуля периодической составляющей эффективной скорости рас пространения плоского фронта пламени $\bar{U}_1$, величина которой может быть определена формулой (36.1). Если далее предположить, что процесс вихреобразования за стабилизатором связан исключительно с возмущением скорости течения $\bar{v}_1$, то величина $\frac{1}{a_1 F} \frac{\partial}{\partial t} V_r(t)$ может быть (в линейном приближении) представлена как

$$\frac{1}{a_1 F} \frac{\partial}{\partial t} V_r(t) = \text{const } \bar{v}_1, \quad (36.3)$$

где const, вообще говоря, комплексная величина, характеризующая амплитуду и фазу стоящего слева выражения при некотором единичном $\bar{v}_1$. Таким образом, $\bar{U}_1$ может быть представлено в виде

$$\bar{U}_1 = \text{const } \bar{v}_1. \quad (36.4)$$

В этом выражении постоянный множитель при $\bar{v}_1$ отличается от постоянного множителя в формуле (36.3), как это видно из сравнения выражений (36.1), (36.3) и (36.4), на единицу.

Если бы оказалось, что срыв вихря связан не только с колебаниями скорости, но и с колебаниями давления, то формулы (36.3) и (36.4) приобрели бы более сложный вид — в правых частях вместо $\bar{v}_1$ оказалась бы линейная комбинация $\bar{p}_1$ и $\bar{v}_1$. Таким образом, тип обратной связи характеризуется в этом случае отсутствием запаздывания, порожденного переносом возмущающей горение прицпшы потоком, т. е. соответствует схемам, изображенным на рис. 66, а и б.

В заключение настоящего параграфа сделаем ряд общих замечаний. В приведенных двух примерах обратных связей, обусловленных гидромеханикой течения, говорилось о влиянии вихреобразования на горение и подчеркивалось воздействие вихреобразования на величппу возмущения скорости распространения пламени $\bar{U}_1$. Это не значит, конечно, что вихреобразование не может вызвать нарушений $\bar{Q}^*$, например, через нарушение смесеобразования (при прохождении вихрем зоны расположения

форсунок) или непосредственно, путем изменения плотности сгорания в зоне σ вследствие нарушения процесса горения. То же самое можно сказать и о P_x . Периодические срывы вихрей со стабилизатора безусловно приведут к периодическому изменению мгновенного значения коэффициента гидравлических сопротивлений устройств, помещенных в зоне горения. При желании можно было бы учесть и эти две слагающие процесса возмущения горения, однако здесь, главным образом из соображений экономии места, приведена лишь наиболее ярко проявляющаяся связь между вихреобразованием и деформацией фронта пламени.

В настоящем параграфе всюду говорилось о способности вихреобразования подстраиваться к частоте акустических колебаний. Этот факт наблюдался непосредственно и при изучении вибрационного горения. Скоростная киносъемка картины горения за одиночным коническим стабилизатором, которая приводилась несколько выше, подтвердила существование указанной связи между вихреобразованием и акустическими колебаниями. Интересно отметить, что «лесенка» частот, приведенная на рис. 51, была получена при горении заранее подготовленной смеси за коническими стабилизаторами. Зафиксированное скачкообразное изменение частот косвенно свидетельствует о том, что способность вихреобразования подстраиваться к частоте акустических колебаний весьма велика.

Нужно сказать, что вполне возможно взаимодействие с процессом горения обоих видов вихреобразования — перед зоной горения и за стабилизатором. В этом отношении может быть показателем следующий опыт. Горение заранее подготовленной горючей смеси производилось в трубе, имевшей камеру сгорания квадратного сечения. В ней изучалась «плоская» задача горения. Пламя удерживалось стабилизатором, расположенным посередине потока и выполненным в форме горизонтального углового профиля, поставленного ребром навстречу потоку. В непосредственной близости от стабилизатора, перед ним, ставилась прямоугольная заслонка, перекрывавшая половину квадратного сечения камеры сгорания (заслонка ставилась вплотную к одной из стенок). Несмотря на

близость от стабилизатора, заслонка не попадала в зону горения, ее можно было ставить горизонтально и вертикально. В первом случае ее кромка, обтекавшаяся потоком смеси, была параллельна кромкам стабилизатора, во втором — перпендикулярна им. Кроме того, заслонку можно было поворачивать так, что она становилась «по потоку» и, таким образом, никак не нарушала характера течения. Опыты сводились к возбуждению в такой системе вибрационного горения с замерами частот и амплитуд колебаний давления. Результаты экспериментов показали, что при вертикальном положении заслонки частоты сохраняли то же значение, что и при заслонке, повернутой «по потоку», однако амплитуды колебаний при этом уменьшались. Переход к горизонтальному расположению заслонки приводил к уменьшению частоты колебаний вдвое и к увеличению амплитуд колебаний. При объяснении вибрационного горения процессами, связанными с вихреобразованием, этот результат естествен: в первом случае половина стабилизатора как бы затенялась и таким образом снижалась интенсивность суммарного процесса вихреобразования; во втором случае заслонка и стабилизатор могли интерферировать, что приводило как к увеличению интенсивности вихреобразования, так и к изменению частоты срыва вихрей. Последнее привело к возбуждению другой гармоники системы, которая легче согласовывалась с новым характером вихреобразования.

Относительно возможности описания воздействия вихреобразования на процесс горения формулами типа (36.2) и (36.4) надо заметить следующее. В указанных формулах связь между акустическими колебаниями и вихреобразованием записана в виде линейного соотношения. Между тем интенсивность вихря связана с амплитудами акустических колебаний более сложным образом, так как размеры вихря определяются в значительной степени размерами плохо обтекаемого тела, которое, естественно, не зависит от частоты акустических колебаний. Следовательно, формулы (36.2) и (36.4) могут иметь лишь ограниченное применение. Чтобы описать процесс вибрационного горения более полно, надо было бы учесть нелинейные соотношения, свойственные процессу вихреобразования.

В принципе это можно сделать, если будут сформулированы соответствующие свойства вихреобразования. Пример решения задачи о вибрационном горении, в котором будут учитываться нелинейные свойства зоны горения, дан в следующей главе.

В заключение несколько слов о методах борьбы с вибрационным горением (если оно нежелательно) в случае, когда обратная связь замыкается через вихреобразование. Выше уже говорилось, что если источник вихреобразования расположен перед зоной горения, то установка спрямляющих решеток и другие аналогичные мероприятия могут оказаться полезными. В том случае, когда колебания возбуждаются вихреобразованием за стабилизатором, дело становится сложнее. Ликвидировать это вихреобразование нельзя, поскольку наличие зоны обратных токов за стабилизатором является обязательным условием его работы в качестве источника поджигания. Кое-что может быть здесь сделано эмпирическим подбором наиболее подходящих геометрических конфигураций стабилизаторов.

В литературе существуют указания на то, что возникающее иногда в промышленных топках вибрационное горение связано не только с возмущением подачи топлива (речь об этом была в предыдущем параграфе), но и с образованием мощных регулярных вихрей в области подачи топлива в зону горения. В тех случаях, когда вибрационное горение является нежелательным, рекомендуется скругление острых кромок и другие мероприятия, облагораживающие аэродинамические обводы соответствующего участка топки. Это практическое правило становится понятным в свете приведенных выше соображений.

Интересно отметить, что в описаниях процесса вихреобразования в топках, в связи с пульсирующим характером горения в них, подчеркивается, что вихрь, в котором происходит горение, имеет тенденцию становиться особенно мощным. Нечто подобное наблюдалось и в описанных выше опытах по вихреобразованию за стабилизаторами при вибрационном горении. Следует, правда, отметить, что вопрос о влиянии процесса горения в вихре на его свойства еще совершенно не изучен.

§ 37. Механизмы обратной связи, основанные на закономерностях собственно горения

Помимо, в некотором смысле, косвенных причин, ведущих к вибрационному горению, — смесеобразования и вихреобразования — в самом процессе горения заложены механизмы, способные сыграть роль обратной связи в этом автоколебательном явлении.

Существование таких механизмов обратной связи, имеющих в основе закономерности самого горения, доказывается, например, тем, что в уже неоднократно упоминавшихся опытах Коварда, Хартвелла и Джорджсона вибрационное горение возникло в заранее подготовленной неподвижной газовой смеси, т. е. в условиях, которые полностью исключают какие-либо эффекты, связанные с вихреобразованием или смесеобразованием.

Приведем поэтому описание некоторых механизмов обратной связи, непосредственно связанных с процессом горения.

а) **Скорость нормального распространения пламени.** Эта скорость зависит от температуры смеси и ее давления; турбулентная скорость распространения может, кроме того, изменяться в зависимости от скорости потока и степени его турбулизации. При колеблющемся газовом столбе в двигателе все перечисленные параметры потока (за исключением, может быть, степени турбулизации) имеют периодическую составляющую. Следовательно, и скорость распространения пламени будет меняться периодически, что может послужить причиной вибрационного горения.

Покажем это на примере возбуждения системы плоским фронтом пламени, скорость распространения которого зависит от температуры смеси и от ее давления перед зоной горения. Поскольку температура не входит в систему избранных переменных (p, v, s), то, воспользовавшись уравнением состояния $p = \rho RT$ и условием адиабатичности $s = \text{const}$, позволяющим связать p и ρ , представим скорость распространения пламени как функцию одного лишь давления перед зоной горения. Обычно зависимости такого рода находятся экспериментально и представляются

в виде степенных функций

$$U_1 = U_1^{(0)} \left(\frac{p_1}{p_1^{(0)}} \right)^r,$$

где индексами «нуль» помечены начальные значения U_1 и p_1 . Рассматривая малые отклонения U_1 от $U_1^{(0)}$, можно написать

$$\delta U_1 = U_1^{(0)} r \frac{\delta p_1}{p_1^{(0)}}. \quad (37.1)$$

Будем считать, что начальные значения U_1 и p_1 , входящие в формулу (37.1), совпадают с U_1 и p_1 в холодном участке трубы, и учтем, что в силу неподвижности фронта пламени относительно наблюдателя в установившемся течении $v_1 = -U$, переходя к принятым в книге безразмерным переменным, получим из (37.1)

$$\bar{U}_1 = -\kappa M_1 r \bar{p}. \quad (37.2)$$

Здесь следует напомнить, что, как уже указывалось в § 16 при обсуждении системы (16.12), увеличению абсолютной скорости распространения пламени, в силу принятого правила знаков, соответствует $U_1 < 0$. Таким образом, при $r > 0$ увеличению давления соответствует увеличение абсолютной величины скорости сгорания.

Формула (37.2) описывает один из возможных механизмов обратной связи, непосредственно связанных с процессом сгорания. Рассмотренный тип обратной связи относится к простейшему, приведенному в верхней части рис. 66.

Основные параметры газового течения, $\bar{p}$ и $\bar{v}$, могут влиять на возбуждение автоколебаний не только через $\bar{U}_1$, но и через $\bar{Q}^*$. Это будет происходить в тех случаях, когда полнота сгорания окажется функцией, например, скорости течения v_1 . Колебания скорости течения перед зоной горения вызовут тогда колебания полноты сгорания, а следовательно, и колебания теплоподвода. Если облечь эти рассуждения в аналитическую форму, то нетрудно получить для $\bar{Q}^*$ выражение, аналогичное формуле (37.2). Легко сообразить, что для возбуждения акустических колебаний полнота сгорания должна достаточно интенсивно падать с увеличением скорости потока.

б) Наличие поджигающего источника. Перечисленные выше механизмы обратной связи могли проявиться и в отсутствие специального поджигающего источника. Наличие такого источника приводит к возможности периодического нарушения поджигания смеси. Это связано с тем, что практически всегда существует некоторая скорость холодного потока, при которой происходит срыв горения. Скорость эта зависит от мощности поджигающего источника; ее существование обусловлено тем, что для поджигания горючей смеси требуется известное время контакта этой смеси с пламенем и, кроме того, само пламя должно быть достаточно мощным, чтобы не быть погашенным потоком. Вопрос этот достаточно подробно излагается в работах по теории горения и поэтому здесь разбираться не будет.

Пусть поджигающий источник, за который «держится» пламя, характеризуется некоторой критической скоростью течения v_1^* , при которой прекращается горение смеси, набегающей на поджигающий источник. Тогда в моменты времени, когда $v_1 + \delta v_1 > v_1^*$, пламя будет отрываться от источника поджигания и уноситься потоком (конечно, если оно в предшествующие мгновения существовало). В моменты времени, когда $v_1 + \delta v_1 < v_1^*$, процесс поджигания смеси будет возобновляться. Описанный здесь механизм обратной связи нередко играет существенную роль. Как правило, этот механизм наблюдается при горении смеси за стабилизатором на режиме сильно развитых колебаний. Несколько ниже этот случай будет рассмотрен более подробно. Здесь же целесообразно начать описание подобного механизма с другого случая. Чтобы исключить влияние вихреобразования, были поставлены специальные опыты, в которых заранее подготовленная однородная смесь поджигалась тонкой и плоской газовой горелкой, установленной в трубе квадратного сечения с кварцевыми стенками. Газовая горелка была выполнена так, чтобы не нарушать заметным образом течения в холодной части квадратной трубы, а пламя за горелкой (при подаче по трубе чистого воздуха, без горючего) имело форму тонкого, короткого и плоского язычка, протянувшегося посередине квадратного сечения от одной кварцевой стенки камеры сгорания до противо-

положитель. При подаче в трубу горючей смеси эта полоска постоянно существующего пламени, питавшегося горючим и кислородом от отдельного источника, поджигала горючую смесь, двигавшуюся вдоль камеры сгорания. Скоростная киносъемка через прозрачные стенки камеры сгорания, которая велась так, что оптическая ось съемочного аппарата была параллельна поджигающему язычку пламени горелки, т. е. перпендикулярна к прозрачной стенке камеры, позволила наблюдать «плоскую» картину горения за таким источником поджигания.

В данном случае какие-либо явления, связанные с вихреобразованием, совершенно исключались. Никаких колебаний непрерывного фронта пламени за горелкой не наблюдалось. Как и при горении за плохо обтекаемым телом, в этом опыте главную роль играли срывающиеся с поджигающего источника объемы горящего газа, которые росли, перемещаясь вместе с потоком, пока не заполняли всего сечения. На рис. 74 даны характерные кадры, полученные киносъемкой в этом эксперименте. На приведенных кадрах хорошо видно, как газовая горелка периодически поджигает горючую смесь, в связи с колебаниями скорости смеси. При увеличении скорости потока относительно горелки ее мощность оказывается недостаточной для поджигания смеси. Смесь воспламеняется вновь, как только колебательная составляющая скорости течения оказывается направленной против средней скорости течения.

Нечто аналогичное можно наблюдать и при горении заранее подготовленной горючей смеси за стабилизаторами, выполненными в виде плохо обтекаемых тел, при сильно развитых колебаниях, сопровождающихся периодическим «забросом» пламени вверх по потоку, в области, лежащие перед стабилизатором. Более подробно этот процесс (но с несколько иной точки зрения) будет рассмотрен в гл. IX.

Аналитическое описание такого явления, как периодический отрыв горящих молей от удерживающего пламя источника поджигания, не представляет трудностей. Здесь, как и в § 36, надо рассмотреть периподписное изменение объема горящих газов в камере сгорания $V_r(t)$, перейти затем к эффективному возмущению скорости

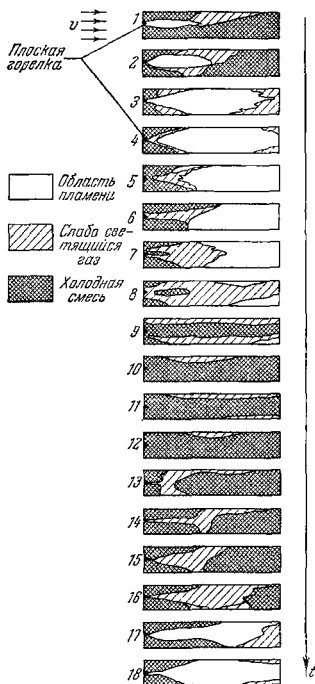


Рис. 74. Характер вибрационного горения за горелкой, исключающей возможность вихреобразования, зарегистрированный скоростной киноъемкой.

распространения пламени $\bar{U}$, и в конечном итоге получить формулу вида (36.4). Следует, правда, добавить, что такое описание легко осуществить для уже возникших автоколебаний. Если же попытаться рассматривать этот процесс как механизм возбуждения автоколебаний, начиная с бесконечно малых амплитуд, то сразу становится ясным, что подобное возбуждение невозможно. Ведь отрыв пламени от источника поджигания может произойти лишь после того, как амплитуда колебаний скорости достигла необходимой величины. Таким образом, описанный механизм способен проявиться в двух случаях. Во-первых, если начальное возмущение было достаточно большим. Такие случаи известны в теории колебаний как случаи жесткого самовозбуждения. Во-вторых, может оказаться, что первоначально колебательная неустойчивость течения возникла в результате реализации другого механизма обратной связи, способного сделать систему неустойчивой по отношению к бесконечно малым возмущениям (мягкое самовозбуждение), и лишь после того, как амплитуды колебаний заметно выросли, колебательная система изменила механизм обратной связи на описанный выше.

в) Явления запаздывания в зоне горения. Нетрудно построить примеры, когда только запаздывание процесса сгорания может дать пучные для возбуждения акустических колебаний амплитудно-фазовые соотношения между возмущениями теплоподвода и возмущениями давления. Покажем это на примере, почерпнутом из теории возбуждения колебаний в жидкостных реактивных двигателях¹⁾.

Как будет более подробно показано в гл. X, при возбуждении продольных акустических колебаний в жидкостных реактивных двигателях наиболее существенным является не возмущение теплоподвода, а возмущение газообразования (сгорание жидкого топлива разумно рассматривать как процесс газообразования). Этот процесс может быть связан с известным периподом индукции. Аналогичные

¹⁾ Crocco L., Journal of the Amer. Rocket Society 21, № 6, 163-178, 1951; 22, № 1, 7-16, 1952. Русский перевод: Вопросы ракетной техники, № 3 (9), 1952, стр. 9-31.

механизмы задержки воспламенения мыслимы и в тех случаях, когда газообразование большой роли не играет, так как количество выпрыскиваемого топлива невелико по сравнению с поступающим в область сгорания воздухом, но большую роль играет возмущение теплоподвода, связанное с задержками воспламенения (обычные топки).

При рассмотрении роли запаздывания процессов воспламенения в процессе возбуждения акустических колебаний в настоящем параграфе будет говориться только о возмущении теплоподвода $\bar{Q}^*$. Следует, однако, иметь в виду, что все сказанное относится и к вопросу о возмущении газообразования (и, быть может, в большей степени). Поэтому ниже, в гл. X, основные соотношения, полученные здесь, будут непосредственно прилагаться к вопросу о возмущении газообразования в жидкостных реактивных двигателях.

Предположим, что расход топлива постоянен, а сгорание происходит в момент выхода топлива из сопла мгновенно. Тогда теплоподвод не возмущается: $\bar{Q}^* = 0$, и, следовательно, самовозбуждение системы невозможно. Совершенно иной будет картина, если процесс сгорания топлива связан с задержками во времени. Прежде чем рассмотреть это, приведем краткие сведения по вопросу о вероятных причинах существования таких задержек.

Превращение находящихся в жидком состоянии компонентов топлива в газообразные продукты сгорания требует известного времени; это время естественно назвать периодом индукции. Период индукции связан со сложной цепью физико-химических процессов, происходящих в камере сгорания. Этими процессами являются распыл топлива, его подогрев и частичное или полное испарение капелек топлива, развитие химических реакций, которые в конечном итоге приводят к образованию продуктов сгорания. Особенностью многих названных явлений является их зависимость от давления. При увеличении давления в камере сгорания повышается скорость смешения распыл становится тоньше, испарение и прогрев капелек топлива ускоряется. Кроме того, скорость ряда химических реакций (особенно идущих в газовой фазе) растет с ростом давления. В результате суммарный

период индукции может иметь ясно выраженную тенденцию к уменьшению при увеличении давления в камере сгорания.

Из сказанного следует, что период индукции можно рассматривать как время, по истечении которого происходит мгновенное превращение топлива в продукты сгорания. (Последнее связано с тем, что после должной подготовки смеси она сгорает очень быстро, поскольку скорость реакции чрезвычайно сильно растет с ростом температуры, в частности, подогрев смеси, связанный с началом ее горения, делает последующее сгорание практически мгновенным. Конечно, эта картина является лишь первым приближением к истинным явлениям.)

Определение суммарного периода индукции возможно только экспериментальным путем. Однако, основываясь на сказанном выше, можно предложить такое соотношение в качестве аналитической зависимости первого приближения:

$$t_{\text{и}} = t_{\text{и}0} + t_{\text{и}1}, \quad (37.3)$$

где $t_{\text{и}0} = \text{const}$, а $t_{\text{и}1}$ определяется из равенства

$$t_{\text{и}1} p^r = \text{const}. \quad (37.4)$$

При этом, поскольку увеличению давления должно соответствовать уменьшение периода индукции, $r > 0$.

По формуле (37.3) период индукции $t_{\text{и}}$ состоит из двух слагаемых: первого, $t_{\text{и}0}$, которое не зависит от давления, и второго, $t_{\text{и}1}$, связанного с давлением соотношением (37.4).

Ниже будет делаться предположение, что $t_{\text{и}0} = 0$, и весь период индукции может быть связан с давлением соотношением (37.4).

Предположим, что в камере сгорания происходят колебания давления. Тогда вместо соотношения (37.4) естественно ввести аналогичное, но записанное в виде интеграла

$$\int_{t_{\text{и}}}^1 p^r dt' = \text{const}. \quad (37.5)$$

Легко видеть, что если $p = \text{const}$, то равенства (37.4) и (37.5) совпадут. Если же $p = p(t')$, то явление становится

более сложным. Пусть, как уже говорилось, форсунки подают постоянное количество топлива. При колебаниях давления происходят колебания периода индукции. Уменьшение его приводит к тому, что сгорание частиц, поступивших в камеру сгорания в определенный момент, совпадает во времени со сгоранием частиц, поданных раньше. Это приводит к увеличению тепловыделения против значения, характерного для установившегося процесса. При увеличении периода индукции будет наблюдаться обратная картина. Таким образом, при наличии колебаний давления вследствие зависимости периода индукции от давления возмущения теплоподвода будут отличны от нуля, что делает возможным самовозбуждение системы. (Для этого необходимо, конечно, не только $Q^* \neq 0$, но и определенное соотношение между фазой возмущения давления и фазой $\bar{Q}^*$.)

Приведенный пример показывает, что зависимость периода индукции от давления может привести к реализации механизма обратной связи, способного возбудить рассматриваемую колебательную систему.

Выше, в § 35, рассматривался пример, когда колебания давления в камере сгорания вызывают колебания расхода топлива. Там же было указано, что в этом случае возбуждение колебаний возможно лишь тогда, когда в системе существует запаздывание воспламенения смеси, т. е. нужна обратная связь получится только при одновременном действии двух причин, имеющих в основе смесеобразование и горение соответственно. Легко заметить, что в этом случае для самовозбуждения колебаний нет необходимости предполагать наличие зависимости периода индукции от давления, так как отличное от нуля $\bar{Q}^*$ получится за счет переменного расхода топлива. Положив в формуле (37.3) $t_{н1} = 0$, будем иметь $t_{н1} - t_{н0} = \text{const}$. Весь дальнейший ход анализа будет близким к примеру, рассмотренному в § 26.

Все сказанное здесь о периоде индукции и его влиянии на возбуждение акустических колебаний справедливо и по отношению к другим конструкциям, например пылеугольным топкам. Как уже указывалось выше, здесь тоже надо допустить существование некоторого периода индукции, чтобы получить нужные фазовые соотношения

между колебательной составляющей поступления пыли в зону горения и колебательной составляющей тепловыделения.

г) **Неустойчивость фронта пламени.** Эта неустойчивость, и особенно ее зависимость от ускорений, может привести к вибрационному горению. В 1944 г. Ландау показал¹⁾, что плоский фронт пламени всегда неустойчив и что эта неустойчивость зависит от действующих на фронт пламени ускорений. Поскольку при вибрационном горении фронт пламени может колебаться вместе с колеблющейся средой, он будет испытывать ускорения, которые периодически меняют знак. Периодически меняющееся ускорение приводит к периодически возникающей неустойчивости фронта пламени, способной возбудить акустические колебания. Вопрос этот достаточно сложен, и его целесообразно выделить в отдельный параграф.

§ 38. Устойчивость плоского фронта пламени

Пусть в одномерном течении горючей смеси расположен плоский фронт пламени, нормальный к вектору скорости течения. Указанный плоский фронт будем рассматривать в качестве поверхности сильного разрыва, на которой скачком изменяются скорость течения, давление и плотность. Поставим вопрос об устойчивости такого плоского фронта пламени. Для получения связи между параметрами течения до и после поверхности теплоподвода в стационарном процессе воспользуемся уравнениями неразрывности и импульсов

$$\begin{aligned} \rho_1 v_1 &= \rho_2 v_2, \\ p_1 + \rho_1 v_1^2 &= p_2 + \rho_2 v_2^2. \end{aligned} \quad (38.1)$$

Если, кроме того, положить, что рассматривается течение несжимаемой жидкости²⁾ (поскольку скорости v_1 и v_2 малы по сравнению со скоростями звука a_1 и a_2), то совершенно так же, как это было сделано в § 10 при рассмотрении вопроса о тепловом сопротивлении, можно

¹⁾ Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, 1953.

²⁾ Это ограничение может быть легко снято.

допустить, что плотность газа обратно пропорциональна его температуре

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{T_2}{T_1}. \quad (38.2)$$

Написанные равенства полностью определяют параметры течения слева и справа от плоскости теплоподвода.

Пусть стационарное течение испытывает малые возмущения скорости и давления. Возмущения плотности полагаем равными нулю, так как плотность в принятой модели явления зависит только от температуры, а последняя в свою очередь от теплотворной способности смеси. Предполагая, что сгорание во фронте пламени является полным как в стационарном, так и в возмущенном режиме горения, получим условия $\varrho = \text{const}$ для течений впереди и позади фронта пламени.

Рассматривая устойчивость самого фронта пламени (пока никак не связанного с возможными акустическими колебаниями), введем плоскость y, z , которая будет совпадать с плоскостью фронта пламени в невозмущенном процессе. Направление оси x сохраним прежним — по скорости течения. Пусть малые возмущения скорости δv и давления δp будут периодическими по времени и координате y , т. е. пропорциональными множителю $\exp(iky - i\Omega t)$ и не будут зависеть от z .

Для определения этих возмущений напомним линейризованные уравнения Эйлера и уравнение неразрывности

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \delta v_x}{\partial t} + v \frac{\partial \delta v_x}{\partial x} &= - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \delta p}{\partial x}, \\ \frac{\partial \delta v_y}{\partial t} + v \frac{\partial \delta v_y}{\partial x} &= - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \delta p}{\partial y}, \\ \frac{\partial \delta v_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (38.3)$$

Система (38.3) должна быть написана отдельно для холодной смеси и отдельно для продуктов сгорания. Индексы x и y при δv указывают, на какую из осей спроектировано возмущение скорости. При v индексов не ставится, так как стационарное течение одномерно (направлено по оси x).

Продифференцировав первое уравнение (38.3) по x , а второе по y , сложив их и учтя третье уравнение (38.3), нетрудно получить, что δp удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \delta p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta p}{\partial y^2} = 0. \quad (38.4)$$

В малой окрестности поверхности разрыва (т. е. при $x \approx 0$) должны выполняться некоторые условия. Рассмотрим их более подробно.

Во-первых, должна быть непрерывной тангенциальная составляющая скорости. Пусть $\delta x(y; t)$ — малое смещение точек поверхности разрыва в направлении оси x , которое возникает при возмущении стационарного процесса. Тогда производная $\frac{\partial \delta x}{\partial y}$ есть тангенс угла наклона фронта пламени к оси y в рассматриваемой точке. Если этот угол обозначить α , то легко сообразить, что касательная компонента полной скорости выразится следующим образом:

$$(v + \delta v_x) \sin \alpha + \delta v_y \cos \alpha.$$

Полагая угол α малым (порядок его малости определяется возмущением δx), сохраним, как обычно, только члены первого порядка малости с учетом того, что для малых углов $\sin \alpha \approx \tan \alpha = \frac{\partial \delta x}{\partial y}$ — напишем следующее выражение для касательной компоненты скорости, справедливое в линейном приближении:

$$\delta v_y + v \frac{\partial \delta x}{\partial y}.$$

Тогда условие равенства тангенциальных скоростей с обеих сторон фронта пламени будет иметь следующий вид:

$$\delta v_{y1} + v_1 \frac{\partial \delta x}{\partial y} = \delta v_{y2} + v_2 \frac{\partial \delta x}{\partial y}. \quad (38.5)$$

Во-вторых, надо сделать какое-либо предположение о зависимости скорости распространения пламени от возмущений фронта пламени. Ландау предположил, что такая зависимость отсутствует, т. е. что скорость распространения разрыва не должна претерпевать измене-

ния при возмущении фронта. Это означает, что фронт пламени будет смещаться только возмущениями скорости, т. е. δv_x .

$$\delta v_x = \frac{\partial \delta x}{\partial t}$$

или

$$\delta v_{1x} = \delta v_{2x} = \frac{\partial \delta x}{\partial t}. \quad (38.6)$$

Позже Маркштейн¹⁾ существенно дополнил теорию Ландау, предположив, что скорость сгорания зависит от кривизны фронта пламени, т. е. может быть связана с величиной $\frac{\partial^2 \delta x}{\partial y^2}$.

В более поздних работах появились и дальнейшие уточнения, которые здесь рассматриваться не будут.

Для целей, которые ставятся в настоящем параграфе, достаточно воспользоваться простым предположением Ландау. То новое, что вносит уточнение Маркштейна, будет вкратце рассмотрено ниже.

Условия (38.5) и (38.6) связывают возмущения скоростей по обе стороны пламени. Для того чтобы связать и возмущения давления, необходимо ввести третье условие. Пусть на поверхность пламени действует некоторое ускорение b . Тогда для δp_1 и δp_2 , взятых в малой окрестности поверхности раздела, можно будет записать такое равенство:

$$\delta p_1 - \delta p_2 = b (q_1 - q_2) \delta x. \quad (38.7)$$

Как уже говорилось выше, решение уравнений (38.3) и (38.4) ищется в виде показательных функций, пропорциональных $\exp(iky - i\Omega t)$. Пусть, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \delta p &= c_1 \exp(iky + ax - i\Omega t), \\ \delta v_x &= c_2 \exp(iky + ax - i\Omega t), \\ \delta v_y &= c_3 \exp(iky + ax - i\Omega t), \end{aligned} \right\} \quad (38.8)$$

¹⁾ Markstein G., Journ. of the Aeronautical Sciences, № 3, 1951. Есть русский перевод: Маркштейн, Экспериментальное и теоретическое изучение устойчивости фронта пламени. Вопросы ракетной техники, 1951, вып. 4.

где a — пока неопределенный множитель. Подставив написанное здесь выражение для δp в уравнение Лапласа (38.4), сразу находим, что

$$a^2 - k^2 = 0 \quad (k > 0)$$

или $a = \pm k$. Подходящее значение a можно выбрать из условия, чтобы возмущения давления, которые связаны с возмущением фронта пламени, не сказывались в бесконечном удалении от фронта, т. е. при $x \rightarrow \pm \infty$. Но тогда, очевидно, для $x < 0$ (холодный газ) следует выбирать $a_1 = k$, а для $x > 0$ (горячий газ) $a_2 = -k$.

Помимо найденного решения, может существовать еще одно. Действительно, уравнение Лапласа удовлетворяется, в частности, при $\delta p = 0$. Рассмотрим этот случай более подробно. Если положить $\delta p = 0$, то правые части первых двух уравнений (38.3) обращаются в нуль. Подставив в них δv_x и δv_y согласно (38.8), найдем, что для этого случая $a = \frac{i\Omega}{v}$. Однако, не допуская, чтобы в бесконечном удалении от поверхности пламени (при $x \rightarrow \pm \infty$) существовали отличные от нуля возмущения скоростей δv_x и δv_y , будем учитывать найденное решение лишь для горячего газа ($x > 0$). Это можно пояснить следующим образом. Множитель Ω , который пока остается неопределенным и который можно будет найти впоследствии из характеристического уравнения, будет, вообще говоря, иметь комплексное значение. При этом в случае положительной мнимой части у Ω все возмущения будут с течением времени, как это видно из (38.8), стремиться к бесконечности. Для этих значений Ω возмущения будут затухать с удалением от фронта пламени лишь при $x > 0$.

Случай, когда мнимая часть Ω отрицательна, интереса не представляет, так как это будут устойчивые колебания, в то время как целью настоящего рассмотрения являются поиски неустойчивых состояний фронта пламени. Подставив решения (38.8) в уравнения (38.3) и предполагая, что они написаны для холодного газа, возьмем $a = k$ и подберем такие значения постоянных коэффициентов c_1, c_2, c_3 , которые удовлетворяют системе (38.3). Из третьего равенства этой системы сразу следует, что $c_3 = ic_2$.

а из любого из двух первых, что $c_1 = \varrho_1 \left(\frac{i\Omega}{k} - v_1 \right) c_2$. Следовательно, коэффициенты c_1 , c_2 и c_3 находятся с точностью до неопределенного множителя A_1 , который, не нарушая общности, можно положить равным c_2 . Таким образом, для холодного газа решения (38.3) будут иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta p_1 &= A_1 \varrho_1 \left(\frac{i\Omega}{k} - v_1 \right) \exp(iky + kx - i\Omega t), \\ \delta v_{1x} &= A_1 \exp(iky + kx - i\Omega t), \\ \delta v_{1y} &= iA_1 \exp(iky + kx - i\Omega t). \end{aligned} \right\} \quad (38.9)$$

Аналогично для горячего газа (учитывая, что имеется два значения a), найдем следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \delta p_2 &= -A_2 \varrho_2 \left(v_2 + \frac{i\Omega}{k} \right) \exp(iky - kx - i\Omega t), \\ \delta v_{2x} &= A_2 \exp(iky - kx - i\Omega t) + \\ &\quad + A_3 \exp\left(iky + \frac{i\Omega}{v_2} x - i\Omega t\right), \\ \delta v_{2y} &= -iA_2 \exp(iky - kx - i\Omega t) - \\ &\quad - \frac{\Omega}{kv_2} A_3 \exp\left(iky + \frac{i\Omega}{v_2} x - i\Omega t\right). \end{aligned} \right\} \quad (38.10)$$

Дополним равенства (38.9) и (38.10) еще одним:

$$\delta x = A_4 \exp(iky - i\Omega t). \quad (38.11)$$

Последнее равенство говорит о том, что на фронте пламени образовались волны, бегущие в направлении оси y . В случае гармонических колебаний эти волны характеризуются частотой Ω или периодом колебаний $T = \frac{2\pi}{\Omega}$, длина волн $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. Равенство (38.11) является аналитической записью сделанного в самом начале предположения, что на стационарный плоский фронт пламени наложено периодическое по времени и по координате y возмущение.

Подставив значения переменных, записанных в виде равенств (38.9), (38.10) и (38.11), для $x=0$ в условия, связывающие решения для холодного и горячего газов

(38.5), (38.6), (38.7), получим систему четырех линейных однородных уравнений, содержащих четыре неопределенных коэффициента: A_1 , A_2 , A_3 и A_4 . Система будет иметь тривиальное решение при равенстве нулю определителя.

$$\begin{vmatrix} i & i & \frac{\Omega}{kv_2} & ik(v_1 - v_2) \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & i\Omega \\ \varrho_1 \left(\frac{i\Omega}{k} - v_1 \right) & \varrho_2 \left(\frac{i\Omega}{k} + v_2 \right) & 0 & b(\varrho_2 - \varrho_1) \end{vmatrix} = 0.$$

Этот определитель можно преобразовать следующим образом. Умножив его вторую строку на $\frac{\Omega}{kv_2}$ и сложив ее с первой, получим определитель третьего порядка, средний столбец которого содержит общий множитель $i - \frac{\Omega}{kv_2}$. Вынося его за знак определителя, получим:

$$\left(i - \frac{\Omega}{kv_2} \right) \begin{vmatrix} i + \frac{\Omega}{kv_2} & 1 & ik(v_1 - v_2) \\ 1 & 0 & i\Omega \\ \varrho_1 \left(\frac{i\Omega}{k} - v_1 \right) & -i\varrho_2 v_2 & b(\varrho_2 - \varrho_1) \end{vmatrix} = 0.$$

Проводя несложные вычисления, найдем из этого равенства характеристическое уравнение системы:

$$\left(i - \frac{\Omega}{kv_2} \right) [\Omega^2 (\varrho_1 + \varrho_2) + 2i\Omega k \varrho_1 v_1 + b k (\varrho_2 - \varrho_1) - k^2 \varrho_1 v_1 (v_1 - v_2)] = 0. \quad (38.12)$$

Прежде всего очевидно, что характеристическое уравнение имеет корень $\Omega = ikv_2$. Однако найденный корень надо отбросить, так как в этом случае исчезают слагаемые с коэффициентом A_3 , указанные слагаемые становятся точно такими же, как слагаемые с A_2 , и следовательно, теряются существенные свойства явления. Поэтому дальнейший анализ устойчивости поверхности разрыва (фронта пламени) будем вести при условии

$\frac{\Omega}{kr_2} \neq 0$. Из (38.12) получим:

$$\Omega^2 (q_1 + q_2) + 2i\Omega k q_1 v_1 - bk (q_2 - q_1) - k^2 q_1 v_1 (v_1 - v_2) = 0. \quad (38.13)$$

Введем для удобства $\Omega_1 = -i\Omega$. Тогда вместо уравнения (38.13) можно написать:

$$\Omega_1^2 (q_1 + q_2) + 2\Omega_1 k q_1 v_1 - bk (q_2 - q_1) - k^2 q_1 v_1 (v_1 - v_2) = 0. \quad (38.14)$$

Проанализируем полученное выражение более подробно. Пусть $b = 0$ (т. е. на фронт пламени не действует ускорение). Тогда, в силу того, что $v_2 > v_1$ (скорость течения продуктов сгорания выше скорости притока свежей смеси), свободный член квадратного (относительно Ω_1) уравнения отрицателен и, следовательно, оба корня вещественны и имеют разные знаки. Следовательно, переходя к Ω , можно утверждать, что движение поверхности разрыва характеризуется двумя мнимыми «частотами» Ω , имеющими разные знаки, т. е. движение будет иметь неустойчивую составляющую. Таким образом, если принять допущения Ландау, получается вывод о неустойчивости всякого плоского фронта пламени.

Как уже говорилось выше, Маркштейн уточнил теорию Ландау, введя вместо условия (38.6) другое, которое учитывает зависимость скорости сгорания от кривизны фронта пламени. В результате уравнение для определения Ω становится несколько более сложным, чем (38.13), и его анализ показывает, что неустойчивость становится функцией числа k , однозначно связанного с длиной волны возмущения на фронте пламени $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. При этом удается показать, что если локальная скорость сгорания увеличивается с уменьшением положительного локального радиуса кривизны фронта пламени¹⁾, то для достаточно

¹⁾ Кривизна считается положительной, когда фронт пламени выпуклый по направлению горящего газа $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} < 0$.

малых λ процесс всегда будет устойчивым, для достаточно больших λ он неустойчив, а для $\lambda = \infty$ нейтрален. Из сказанного следует, что существует некоторое значение $\lambda = \lambda_{\max}$, при котором процесс максимально неустойчив.

Если считать, что именно этот вид неустойчивости проявится в опыте, то следует ожидать появления на плоском фронте пламени волн, имеющих длину, соответствующую $\lambda_{\max}$.

Маркштейн провел серию тонких экспериментов, в которых показал, что такие волны действительно образуются и приводят к так называемой ячеистой структуре фронта пламени. Скоростная киносъемка обнаружила, что фронт пламени как бы распадается на ряд ячеек, выпуклостью направленных в сторону свежей смеси. Ячейки все время находятся в беспорядочном движении, причем большие ячейки увеличиваются за счет маленьких и расщепляются при достижении чрезмерной величины. В результате происходит известная нивелировка размеров ячеек, и можно говорить об их средней величине. Оценка, произведенная Маркштейном, показала, что размер этих ячеек не противоречит предположению о связи их характерной величины с длиной волны $\lambda_{\max}$.

Все то, что до сих пор говорилось, относилось к тому случаю, когда $b=0$, т. е. на фронт пламени не действуют ускорения.

Достаточно взглянуть на уравнение (38.14), чтобы убедиться, что в зависимости от знака b ускорение может оказывать стабилизирующее или дестабилизирующее влияние на процесс. Если $b < 0$, то предпоследнее слагаемое в (38.14) будет отрицательным (так как вследствие нагрева $\rho_2 < \rho_1$) и, следовательно, увеличится абсолютная величина отрицательного свободного члена квадратного уравнения (38.14), что приведет к увеличению абсолютной величины отрицательного корня Ω_1 , порождающего неустойчивость. При $b > 0$ будет наблюдаться обратная тенденция.

В опытах Маркштейна труба, в которой производилось сжигание заранее подготовленной смеси воздуха с различными углеродами, стояла вертикально, причем так, что холодный газ (свежая смесь) был внизу, а продукты

сгорания в верхней части трубы. Следовательно, на фронт пламени действовало ускорение силы тяжести $b \approx g$. В силу действия этого ускорения, соответствующего $b > 0$, процесс должен был стать более стабильным, чем если бы труба располагалась горизонтально.

Надо сказать, что как неустойчивость фронта пламени в смысле Ландау, так и связанная с нею ячеистая структура этого фронта не имеют прямого отношения к вибрационному горению, т. е. возбуждению акустических колебаний в трубах. Для наблюдения этих эффектов нет никакой необходимости в акустических колебаниях среды. Однако если акустические колебания возникли, то они могут оказать мощное воздействие на рассмотренный вид неустойчивости самого фронта пламени. Действительно, при акустических колебаниях, если только фронт пламени не находится в узле скорости, его будет «таскать» за собою колеблющаяся среда. При этом неизбежно возникновение ускорений, действующих на фронт пламени, отличных от нуля даже тогда, когда земное ускорение на него не действует (вертикальное положение фронта пламени). Поскольку ускорение, связанное с колебаниями среды, будет периодически менять знак, постольку периодически будет усиливаться или ослабляться неустойчивость фронта пламени.

Маркштейн наблюдал это явление экспериментально. В тех случаях, когда в его опытах возникали колебания фронта пламени как целого, скоростная киносъемка показывала, что ячеистая структура пламени имеет тенденцию к периодическому усилению и ослаблению — ячейки появлялись и исчезали в ритме вибрационного движения фронта пламени. Таким образом, можно говорить о том, что акустические колебания влияют на устойчивость фронта пламени, а следовательно, и на его структуру.

Последнее наводит на мысль о возможности возникновения обратной связи, необходимой для возбуждения акустических колебаний. Действительно, если в ритме акустических колебаний происходит изменение структуры пламени, то это может привести к изменению эффективной скорости сгорания в том же ритме, что в принципе может оказаться достаточным для поддержания

акустических колебаний. Эту мысль высказывают в своей работе Маркштейн и Скуайр¹⁾.

Надо сказать, что явления, связанные с ячеистой структурой фронта пламени, вряд ли играют значительную роль при возбуждении акустических колебаний в промышленных установках. Эти эффекты наблюдались лишь при достаточно малых скоростях течения. В упоминавшихся выше опытах Маркштейна числа Рейнольдса для потока в трубе лежали в пределах 400—600, т. е. соответствовали ламинарному режиму течения. По-видимому, значительно более существенную роль играет несколько иной эффект, к рассмотрению которого теперь можно перейти.

Если вернуться к уравнению (38.14), то нетрудно видеть, что возникновение неустойчивости на фронте пламени связано с двумя различными эффектами. Во-первых, она может возникнуть в том случае, когда секундный поток массы газа через поверхность разрыва отличен от нуля ($\varrho_1 v_1 \neq 0$). Во-вторых, она может возникнуть и при условии $\varrho_1 v_1 = 0$, но только если имеет место отрицательное ускорение b . Первый случай рассматривался выше достаточно подробно. Рассмотрение второго совершенно элементарно. Если $\varrho_1 v_1 = 0$, то из уравнения (38.13) получаем

$$\Omega = \pm \sqrt{bk \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_1 + \varrho_2}}, \quad (38.15)$$

формулу, известную для колебаний двух тяжелых жидкостей, расположенных друг над другом. В последнем случае полагают $b = g$ и вещественные Ω (устойчивость) получаются тогда, когда $\varrho_2 < \varrho_1$, т. е. верхняя жидкость легче нижней.

Указанные два типа неустойчивости проявляются различным образом. Первый из них, связанный с пересечением массой газа фронта пламени ($\varrho_1 v_1 \neq 0$), дает ячеистую структуру пламени, подробно рассматривавшуюся Маркштейном. Как уже говорилось выше, этот вид неустойчивости возникает и при отсутствии ускорений

¹⁾ Markstein G. H., Squire W., On the stability of a plane flame front in Oscillating Flow., Journ. Acoust. Soc. Amer., 1955, v. 27, № 3.

($b=0$). Что касается второго типа неустойчивости, связанного с отличием b от нуля, то для его возникновения не надо предполагать пересечения потоком массы поверхности раздела сред, имеющих различную температуру, она может проявиться и на поверхности, разделяющей в среднем неподвижные газы, если только ускорение будет направлено от холодного газа к горячему. Неподвижность газов в среднем говорит о том, что горение не протекло, так как последнее всегда связано с переходом холодных газов через фронт пламени, за которым они становятся горячими. Следовательно, второй тип неустойчивости может проявляться в чистом виде на поверхности раздела газов, имеющих разную плотность (температуру) и подверженных действию ускорения нормального к поверхности раздела. Типичным видом такой неустойчивости является волнообразование на поверхности тяжелой жидкости под действием ускорений.

Периодически изменяющие свой знак ускорения, которые могут действовать на фронт пламени при акустических колебаниях, неизбежно вызовут волнообразование на поверхности раздела (фронте пламени). Указанное волнообразование будет взаимодействовать с явлениями, приводящими к ячейчатой структуре пламени, однако, если попытаться оценить эти два вида неустойчивости с точки зрения их обратного влияния на акустические колебания, то волнообразование надо будет признать более важным. Последнее связано главным образом с тем, что периодически увеличивающееся и уменьшающееся волнообразование ведет к периодическому изменению интегральной поверхности раздела (площади фронта пламени) и, следовательно, к периодическому изменению эффективной скорости сгорания.

Чтобы проследить это явление в чистом виде и получить простые формулы, проанализируем устойчивость поверхности раздела при $v_1 = v_2 = 0$. Качественно картина не изменится, если взять v_1 и v_2 отличными от нуля, но это излишне усложнит анализ. Для того чтобы рассмотреть устойчивость поверхности раздела под действием ускорения b , имеющего периодическую составляющую, уже нельзя воспользоваться формулой (38.15), полученной в предположении $b = \text{const}$, а весь вывод нужно повто-

рить заново. Поскольку условия на поверхности раздела являются теперь функциями времени, решение системы (38.3) следует искать не в виде (38.8), а в более общей форме, в виде произведения пока неопределенных функций времени $F(t)$ на множитель $\exp(iky + ax)$.

Итак, пусть

$$\left. \begin{aligned} \delta p &= F_1(t) \exp(iky + ax), \\ \delta v_x &= F_2(t) \exp(iky + ax), \\ \delta v_y &= F_3(t) \exp(iky + ax). \end{aligned} \right\} \quad (38.16)$$

Подставив δp в уравнение (38.4), получим, как и ранее, $a = \pm k$, причем выбор знаков k сохранится: для $x < 0$ $a_1 = k$, а для $x > 0$ $a_2 = -k$.

Для холодного участка газа ($x < 0$) подстановка значений переменных (38.16) в систему (38.3), с учетом того, что $v = 0$, даст следующие соотношения между $F_1(t)$, $F_2(t)$ и $F_3(t)$:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= -\frac{q_1}{k} F_2, \\ F_3 &= iF_2. \end{aligned} \right\} \quad (38.17)$$

Обозначив $F_2(t) = A_1(t)$, можно записать: при $x < 0$

$$\left. \begin{aligned} \delta p_1 &= -\frac{q_1}{k} A_1'(t) \exp(iky + kx), \\ \delta v_{1x} &= A_1(t) \exp(iky + kx), \\ \delta v_{1y} &= iA_1(t) \exp(iky + kx). \end{aligned} \right\} \quad (38.18)$$

Для горячего газа ($x > 0$) из совершенно аналогичных соображений получим:

$$\left. \begin{aligned} \delta p_2 &= \frac{q_2}{k} A_2'(t) \exp(iky - kx), \\ \delta v_{2x} &= A_2(t) \exp(iky - kx), \\ \delta v_{2y} &= -iA_2(t) \exp(iky - kx). \end{aligned} \right\} \quad (38.19)$$

Соотношения (38.18) и (38.19) являются более общей записью соотношений (38.9) и (38.10), правда, для случая, когда $v_1 = v_2 = 0$.

При сравнении выражений (38.10) и (38.19) бросается в глаза отсутствие во второй группе выражений слагаемых с множителем A_3 . Это связано с тем, что при $v_1 = v_2 = 0$ $A_3 = 0$. Действительно, решение с A_3 было получено выше как решение, удовлетворяющее первым двум уравнениям (38.3) при $\delta p = 0$. Здесь в силу того, что $v = 0$, будет $\frac{\partial \delta v_x}{\partial t} = 0$ и $\frac{\partial \delta v_y}{\partial t} = 0$, следовательно, функции $F_2(t)$ и $F_3(t)$ в формулах (38.16) являются постоянными. Если они отличны от нуля, то должно существовать некоторое отличное от нуля и постоянное во времени возмущение δv_x и δv_y вдоль координаты x , которое в рассматриваемой задаче отсутствует. Следовательно, постоянные F_2 и F_3 равны нулю и слагаемые с A_3 , отличным от нуля, в решении появиться не могут. Дополним, как и выше, равенства (38.18) и (38.19) еще равенством

$$\delta x = A_4(t) \exp iky, \quad (38.20)$$

являющимся более общей записью выражения (38.11).

Обратимся теперь к формулированию условий, которые должны выполняться на поверхности раздела (при $x = 0$). Поскольку теперь необходимо связать лишь три функции — $A_1(t)$, $A_2(t)$ и $A_4(t)$, — одно из четырех условий (38.5), (38.6) и (38.7) является лишним. Легко сообразить, что это условие равенства тангенциальных скоростей (38.5), поскольку при $v_1 = v_2 = 0$, т. е. при отсутствии пересечения средой поверхности раздела, оно теряет физический смысл.

Подставив значения переменных (38.18), (38.19) и (38.20) в условия (38.6) и (38.7), сразу получаем

$$\left. \begin{aligned} A_1(t) &= A'_1(t), \\ A_2(t) &= A'_2(t), \\ -\frac{1}{k} (q_1 A'_1 + q_2 A'_2) - b (q_1 - q_2) A_4 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (38.21)$$

откуда следует дифференциальное уравнение для определения A_4 :

$$A_4'' + kb \frac{q_1 - q_2}{q_1 + q_2} A_4 = 0. \quad (38.22)$$

Полагая $h = \frac{2\pi}{\lambda}$, где λ — длина волны на поверхности раздела, и считая, что при акустических колебаниях поверхность раздела целиком смещается вдоль оси x вместе с колеблющейся средой по синусоидальному закону

$$h = h_0 \cos \omega t \quad (38.23)$$

(h — смещение среды, ω — размерная частота акустических колебаний [1/сек]), получим следующую форму записи уравнения (38.22):

$$A''(t) + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{q_1 - q_2}{q_1 + q_2} (g_x - \omega^2 h_0 \cos \omega t) A = 0. \quad (38.24)$$

Здесь $A = A_1$, $b = g_x - \omega^2 h_0 \cos \omega t$, причем под g_x понимается проекция ускорения силы тяжести на ось x , взятая с обратным знаком.

Для вертикальной трубы g_x совпадает с полным ускорением силы тяжести g , для трубы с горизонтальным направлением оси $g_x = 0$. Второе слагаемое b получено двукратным дифференцированием выражения для h .

Если ввести независимую переменную $z = \frac{1}{2} \omega t$, то уравнение (38.24) сводится к известной форме уравнения Матье:

$$A''(z) + (a - 2q \cos 2z) A(z) = 0, \quad (38.25)$$

где

$$a = \frac{8\pi g_x (q_1 - q_2)}{\lambda \omega^2 (q_1 + q_2)},$$

$$q = 4\pi \frac{h_0 (q_1 - q_2)}{\lambda (q_1 + q_2)}.$$

Как известно из математического анализа, решение линейного дифференциального уравнения этого типа имеет вид

$$A(z) = C_1 e^{sz} f(z) + C_2 e^{-sz} f(-z), \quad (38.26)$$

где s — некоторая постоянная, а $f(z)$ — периодическая функция с периодом π или 2π .

Из решения (38.26) видно, что любому вещественному s , отличному от нуля, соответствует неустойчивость, так

как вне зависимости от знака s , в одном из слагаемых (38.26) экспоненциальная функция будет иметь положительный показатель, пропорциональный времени (пропорциональный z). Устойчивости соответствуют лишь минимальные значения s .

Будем далее рассматривать горизонтальную трубу, т. е. положим $g_x = 0$, а следовательно, $a = 0$. Если изменить параметр q так, чтобы он пробегал положительные значения, начиная от нуля, то так называемый характеристический показатель s , равный при $q = 0$ нулю, станет при возрастании q сначала мнимым, затем при $q = 0,91$ вещественным и отличным от нуля, при $q = 7,5$ станет вновь мнимым, затем почти сразу вещественным, вплоть до $q \cong 21$, и т. д. Следовательно, по мере увеличения q будут чередоваться области устойчивости и неустойчивости, причем области устойчивости характеризуются крайне малыми отрезками на оси q , в то время как области неустойчивости являются весьма протяженными. Таким образом, неустойчивость будет наблюдаться практически всегда.

Подробное рассмотрение вопросов, требующих применения теории уравнений типа Матье, здесь приводиться не будет. В § 49 будет дано решение рассматриваемой здесь задачи в несколько упрощенной постановке, позволяющей получить его в элементарных функциях.

Для дальнейших выкладок необходимо еще указать, что первая из названных областей неустойчивости $0,91 < q < 7,5$ характеризуется периодом функции $f(z)$, входящей в решение (38.26), равным 2π . Следующая область неустойчивости $7,5 < q < 21$ будет соответствовать функциям $f(z)$ с периодом π , затем при $21 < q < 42$ функция $f(z)$ будет вновь иметь период 2π и т. д. (написанные неравенства являются приближенными, кроме того, в них не учитывается, что между областями неустойчивости лежат узкие интервалы значений q , при которых поверхность раздела устойчива).

Поскольку возможна двоякая периодичность решения (38.26), а для того чтобы неустойчивость поверхности раздела (фронта пламени) могла сыграть роль механизма обратной связи, надо чтобы эта периодичность находилась в должном соответствии с периодом акустических

колебаний, рассмотрим вопрос о соотношениях между периодами.

Период акустических колебаний газового столба есть $T_{\text{ак}} = \frac{2\pi}{\omega}$. Если перейти к независимой переменной

$z = \frac{1}{2} \omega t$, то период акустических колебаний будет

$z_{\text{ак}} = \pi$. Поэтому решения (38.26) в тех областях значений q , где период $f(z)$ равен π , будут соответствовать колебаниям поверхности раздела (фронта пламени) с частотой акустических колебаний, в то время как в других областях значений q , где период изменения функций $f(z)$ равен 2π , период колебаний поверхности раздела будет в два раза больше периода акустических колебаний.

Нетрудно сообразить, что для возможности возникновения механизма обратной связи, основанного на колебаниях поверхности раздела (фронта пламени) под действием акустических колебаний, необходимо чтобы период колебаний поверхности раздела был в два раза больше акустического. Действительно, это видно из следующих простых соображений. Увеличение, вследствие волнообразования, общей площади поверхности раздела ведет, как известно, к увеличению эффективной скорости распространения пламени. Чтобы эффективная скорость распространения пламени изменялась в ритме акустических колебаний (а это необходимо для возникновения обратной связи), надо, чтобы период колебаний поверхности пламени был бы в два раза больше периода акустических колебаний, поскольку площадь поверхности раздела (фронта пламени) будет увеличиваться как при выпбеге в положительном, так и в отрицательном направлении оси x . Для большей наглядности соответствующие схемы приведены на рис. 75. Слева приведен случай, когда периоды акустических колебаний (переменная δp) и колебаний поверхности раздела (переменная δx) совпадают. Тогда период изменения площади поверхности раздела δs оказывается вдвое меньше акустического. Справа на том же рисунке приведен случай, когда период колебаний поверхности раздела превосходит период акустических колебаний вдвое; изменение δs происходит в этом

случае в том же ритме, что и изменение δp , а это открывает возможность для возникновения механизма обратной связи.

Таким образом, не все области неустойчивости, полученные при анализе уравнения (38.25), представляют интерес с точки зрения взаимодействия с акустическими колебаниями; существенными в этом смысле надо признать

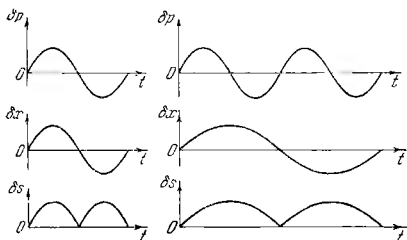


Рис. 75. Связь между периодами колебаний давления δp , смещения δx и возмущения поверхности пламени δs .

область значений q , определяемую неравенствами $0,91 < q < 7,5$, затем область $21 < q < 42$ и т. д., т. е. области, для которых период функции $f(z)$ равен 2π .

Если сравнивать между собой интервалы значений q , для которых период функции $f(z)$ равен 2π , то наибольший практический интерес представляет интервал $0,91 < q < 7,5$, характеризуемый наименьшими значениями q . Это следует из таких соображений. Величина

$$q = 4\pi \frac{q_1 - q_2}{q_1 + q_2} \frac{h_0}{\lambda} \quad (38.27)$$

пропорциональна отношению $\frac{h_0}{\lambda}$. Длина волны возмущения поверхности раздела λ связана с размерами сечения трубы, в которой происходят колебания, и, если не рассматривать очень высоких гармоник, имеет порядок характерного линейного размера этого сечения. Если

считать, что порядок величины λ известен, то первая область значений q будет соответствовать наименьшим амплитудам h_0 . Оценим порядок этих амплитуд. При $0,91 < q < 7,5$ и подогреве, характеризуемом $\frac{Q_1}{Q_2} = 6$, для $\frac{h_0}{\lambda}$ получим следующие неравенства:

$$0,1 < \frac{h_0}{\lambda} < 0,83,$$

в то время как для ближайшей подходящей области значений q , лежащих в интервале $21 < q < 42$, будем иметь

$$2,3 < \frac{h_0}{\lambda} < 4,7.$$

Приведенные числа достаточно убедительны сами по себе. Для реализации неустойчивости, соответствующей второму интервалу значений q , смещения среды при акустических колебаниях должны в 2-5 раз превосходить длины волн, образовавшихся на поверхности раздела.

Совершенно очевидно, что значительно более вероятна реализация колебаний с меньшими амплитудами h_0 , соответствующими первому интервалу значений q . Кроме того, можно привести еще такое соображение. Если рассматривать процесс нарастания колебаний, мысленно увеличивая h_0 от нуля, то первой подходящей областью значений q , которая встретится, окажется интервал $0,91 < q < 7,5$. В то же время переход ко второй области будет затруднен, так как в промежутке лежат область $7,5 < q < 21$, в которой поддержание акустических колебаний рассматриваемым механизмом обратной связи невозможно.

Выше уже говорилось, что полученные результаты приближенно справедливы и для случая горения, т. е. для режимов, характеризуемых отличными от нуля v_1 и v_2 . Поэтому свяжем колебания поверхности раздела с возмущениями эффективной скорости распространения пламени. Как видно из формул (16.5) и (16.7), возмущение скорости распространения пламени δU определяется равенством

$$\delta U = -\frac{1}{F} \frac{\partial}{\partial t} V_T(t) - \delta v. \quad (38.28)$$

Изменение объема горячих газов $V_r(t)$ складывается из смещения фронта пламени скоростью течения v , что за время dt при поперечном сечении трубы, равном F , составляет $Fvdt$, и перемещения фронта пламени по частицам газа (вследствие горения) на величину $SU_n dt$, где S — суммарная площадь фронта пламени (вообще говоря, искривленного), а U_n — скорость распространения элемента фронта пламени в направлении, нормальном к его поверхности.

В установившемся режиме, когда фронт пламени неподвижен относительно стенок, $Fv + SU_n = 0$. Следовательно, в возмущенном движении $V_r(t)$ изменится за время dt на

$$(F\delta v + U_n\delta S + S\delta U_n) dt.$$

Если считать величину U_n постоянной, то последнее слагаемое в написанной сумме обратится в нуль. Во многих случаях это предположение в первом приближении можно считать справедливым, поэтому ниже будем считать, что

$$-\frac{\partial V_r(t)}{\partial t} = F\delta v + U_n\delta S.$$

Подстановка этого равенства в (38.28) дает следующее выражение для возмущения эффективной скорости сгорания:

$$\delta U = U_n \frac{\delta S}{F}. \quad (38.29)$$

Напомним, что увеличению абсолютной величины эффективной скорости сгорания соответствует смещение фронта пламени в сторону холодной смеси, т. е. в отрицательном направлении оси x .

Если продолжать рассматривать плоскую задачу возмущения фронта пламени, то площадь поверхности фронта пламени (при единичной протяженности в направлении оси z) будет прямо пропорциональна высоте волны, образовавшихся на поверхности раздела, т. е. пропорциональна абсолютной величине δx , которое выражается формулой (38.20). Как было показано несколько выше, величина A_1 может, при известных условиях, колебаться с периодом, вдвое превосходящим период акустических колебаний, а тогда абсолютная величина A_1 будет изменяться

во времени с тем же периодом, что и акустические колебания. Разлагая в этом случае разность $|\delta x| - |\delta x|_{\text{ср}}$ в ряд Фурье и отбрасывая высшие гармоники разложения, можно написать, что

$$|\delta x| - |\delta x|_{\text{ср}} = B_1 \sin(\omega t + \varphi), \quad (38.30)$$

где $|\delta x|_{\text{ср}}$ — средняя абсолютная величина δx при заданном положении рассматриваемой точки по оси y ¹⁾.

Но тогда величина δS будет колебаться около некоторого среднего значения по аналогичному закону:

$$\delta S = B_2 \sin(\omega t + \varphi). \quad (38.31)$$

Таким образом, возмущение эффективной скорости распространения пламени δU (38.29) также будет изменяться с частотой акустических колебаний. Это говорит о том, что обратная связь замкнулась: акустические колебания среды (точнее, связанные с ними ускорения) привели к периодическому волнообразованию на поверхности пламени. Это волнообразование привело к пульсационному — с частотой акустических колебаний изменению эффективной скорости сгорания, что, как известно из гл. IV, при должных амплитудно-фазовых соотношениях снова дает акустические колебания.

В настоящей главе, посвященной поискам возможных механизмов обратной связи, нет нужды уточнять фазу φ в формуле (38.31). Достаточно того, что показана принципиальная возможность самовозбуждения акустических колебаний вследствие деформации фронта пламени при колебаниях среды. Более подробно задача о реализации такого вида самовозбуждения будет, как уже говорилось, решена в § 49.

В заключение следует обратить внимание на одну особенность рассмотренного механизма обратной связи. Волнообразование на поверхности пламени является типичным процессом параметрического резонанса: вследствие периодичности существенного параметра системы (в рассматриваемом случае ускорения) происходит воз-

1) На самом деле явление будет несколько сложнее, так как A_4 включает в качестве множителя показательную функцию времени

буждение колебаний поверхности фронта пламени. Возбуждение таких колебаний может вести к возрастанию амплитуд волнообразования на фронте пламени без того, чтобы возрастали амплитуды акустических колебаний. Таким образом, обратная связь рассматриваемого типа, в известном смысле, сложнее тех, которые описывались в предыдущих параграфах. Это накладывает определенные трудности на строгое рассмотрение задачи в целом. Более полное изучение этого вопроса выходит за рамки настоящей книги.

ГЛАВА VIII

РАСЧЕТ АВТОКОЛЕБАНИЙ С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНЫХ СВОЙСТВ ЗОНЫ ТЕПЛОПРОВОДА

§ 39. Общая характеристика автоколебаний

Выше уже неоднократно говорилось, что вибрационное горение и другие аналогичные процессы являются типичным примером автоколебаний. Это проявляется, в частности, в том, что вибрационное горение возникает внезапно, казалось бы, без какой-либо видимой причины. В момент, когда необходимые условия созрели, амплитуды колебаний совершают резкий и практически мгновенный скачок. Последнее хорошо видно, например, на рис. 76, где приведены средние значения амплитуд колебаний давления в дозвуковом потоке воздуха, колеблющаяся в котором были возбуждены горением. График на указанном рисунке построен в виде зависимости отношения амплитуды колебаний давления δp в некотором сечении потока к амплитуде колебаний, характерной для нормального (спокойного) горения δp_n в том же сечении от коэффициента избытка воздуха α . Опыт, результат которого приведен на рис. 76, сводился к тому, что после поджигания горючей смеси производилось постепенное обогащение смеси (уменьшение α), при этом, по мере обогащения ее, регистрировались амплитуды колебаний давления в некотором сечении трубы. Из приведенного экспериментального графика видно, что в некотором диапазоне изменения α (от $\alpha=2$ до $\alpha=1,38$) никакого изменения амплитуды колебаний давления не происходит. Затем при почти незаметном изменении α от 1,38 до 1,34 наблюдается внезапное, скачкообразное увеличение амплитуды в пять раз.

При дальнейшем уменьшении α эта амплитуда практически не меняется. Помимо скачкообразного изменения амплитуд, переход через $\alpha=1,38 \div 1,34$ сопровождается также изменением характера самих колебаний: если при $\alpha > 1,38$ колебания неопределенны и изменчивы и имеют составляющие самых различных частот, то при $\alpha < 1,34$ наблюдаются совершенно четкие колебания, составленные

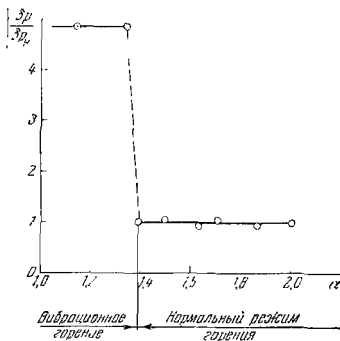


Рис. 76. Изменение относительной амплитуды колебаний давления при переходе к вибрационному горению.

одной или иногда двумя гармониками, характерными для акустических свойств трубы в целом. Оба типа осциллограмм приведены на рис. 68.

Такое поведение колебательной системы можно объяснить следующим образом. При $\alpha > 1,38$ система устойчива и наблюдающиеся колебания давления являются следствием турбулентности течения, возмущений давления, связанных с горением и т. д. Где то между $\alpha = 1,38$ и $\alpha = 1,34$ система становится колебательно-неустойчивой по отношению к малым возмущениям; амплитуды той гармоник, которая стала неустойчивой, начинают быстро возрастать, и она вскоре становится доминирующей. Рост амплитуд ставшей неустойчивой гармоник приоста-

павливается явлениями, связанными с нелинейными свойствами системы, речь о них будет идти ниже.

Поскольку темп увеличения амплитуды колебаний неустойчивой гармоники достаточно велик (обычно она достигает установившегося значения за 2—3 колебания, т. е. за малые доли секунды), то переход от нормального горения к вибрационному происходит практически мгновенно.

Как известно, линейная теория способна ответить на вопрос об устойчивости системы, но фактическое вычисление амплитуд автоколебаний в рамках линейной теории невозможно. Очень часто амплитуды автоколебаний интереса не представляют и вычисление их излишне. В подобных случаях можно ограничиваться линейной теорией. Таковы, в частности, требования к теории в тех случаях, когда автоколебания недопустимы. Действительно, если вибрационное горение не должно возникать (так как оно грозит разрушением топки или двигателя), то достаточно решить задачу об устойчивости процесса, а затем следить за тем, чтобы параметры системы не выходили из границ устойчивости. Другое дело, если автоколебания являются рабочим режимом, как, например, в топках с вибрационным сжиганием горючего. Тогда вычисление амплитуд является обязательным. Конечно, это не единственный случай, когда требуется знание амплитуд автоколебаний; оно может оказаться полезным и тогда, когда надо предварительно оценить величину амплитуд, чтобы решить вопрос о допустимости автоколебательного режима работы установки. Коротче говоря, могут представиться случаи, когда расчет амплитуд автоколебаний будет необходим, т. е. будет необходимо учитывать такие свойства колебательной системы, которые не могут быть описаны линейными соотношениями; эти свойства будут для краткости называться далее существенными нелинейностями.

Из большого числа нелинейных процессов, сопровождающих вибрационное горение, следует выделить наиболее важные, опустив другие, чтобы излишне не затруднять решение задачи. Потери с нелинейными характеристиками можно локализовать тремя способами. Во-первых, они могут быть распределены вдоль оси течения (трение и потери, связанные с нелинейностью уравнений гидро-

механики). Во-вторых, они могут быть связаны с излучением энергии из концов трубы; соответствующее условие может быть дано в виде зависимости акустических импедансов на концах трубы от амплитуды колебаний. Наконец, можно предположить, что процесс тепловыделения (горения) при достаточно больших амплитудах колебаний существенно отклоняется от представляемого линейными соотношениями.

Внимательный анализ опытных данных показывает, что в огромном большинстве случаев можно с полной определенностью говорить о доминирующем значении нелинейностей, свойственных процессу горения. Поэтому в настоящей главе будет рассмотрен только этот случай. В то же время применяемый ниже метод может быть легко распространен на более широкий круг задач.

В предыдущей главе были приведены многочисленные примеры механизмов обратной связи, способных привести к самовозбуждению колебательной системы. Конкретный ход решения задачи, конечно, зависит от того, какой из этих механизмов обратной связи рассматривается в ней; однако общая методика решения не будет претерпевать существенных изменений при переходе к другому механизму. Поэтому хотя приводимое ниже решение и опирается на один конкретный механизм обратной связи, его следует рассматривать как иллюстрацию применения общего метода. Выбор механизма обратной связи для помещенной ниже задачи был сделан таким образом, чтобы результаты расчета можно было сравнить с опытными данными.

§ 40. Существенные нелинейности в зоне горения

Приведенные в предыдущем параграфе соображения указывают на то, что для описания колебаний газовых столбов, лежащих слева и справа от зоны горения, можно по-прежнему пользоваться линейными уравнениями § 4, в то время как для зоны горения σ следует учитывать существенные нелинейности. Первое из этих утверждений хорошо подтверждается экспериментом: энтропии стоячих волн давления, подсчитанные по линейной теории, хорошо согласуются с экспериментальными, снятыми при авто-

колебаниях (рис. 53). Справедливость второго утверждения будет показана ниже.

Будем считать, что процесс теплоподвода в зоне горения зависит от колебаний газового потока. Пусть эта зависимость проявляется двояким образом: фронт пламени будет подвижным и, кроме того, количество выделяющегося на единицу массы газа тепла не будет постоянным, т. е. примем, что $\bar{Q}^* \neq 0$. Относительно подвижности фронта пламени будем предполагать следующее. Пусть эффективная скорость распространения пламени относительно стенок трубы N , определяемая формулой (16.5), совпадает с мгновенным значением колебательной составляющей скорости δv_1 . Физически это означает, что колеблющийся поток будет «таскать» за собою фронт пламени. Такое предположение позволяет легко пайти входящие в описываемую свойства поверхности Σ (область σ) систему (15.7) величины $\bar{J}_1$, $\bar{J}_2$ и $\bar{J}_3$ при помощи соотношений (16.2), (16.3) и (16.4). Величину $\bar{\eta}_{\text{сг}} + \bar{q}_1$, фигурирующую в последнем равенстве системы (15.7), найдем несколько позже.

Здесь следует заметить, что использование системы (15.7), строго говоря, допустимо лишь для задачи, описываемой линейными соотношениями. Сохраняя предположение о возможности описания линейными уравнениями процессов на концах трубы и внутри нее, вне области теплоподвода σ , допустим также, что внутри области теплоподвода все величины будут продолжать связываться линейными соотношениями, за исключением члена $\bar{\eta}_{\text{сг}} + \bar{q}_1$, т. е. за исключением возмущения самого теплоподвода. Как будет видно из дальнейшего, последнее ограничение не является принципиальным и его легко снять. Здесь эта возможность не используется для того, чтобы не делать решения задачи более громоздким.

Используем систему (15.7), соотношения (16.2), (16.3), (16.4) и (16.5), а также учтем, что на основании кинематического условия (16.6)

$$\delta v_1 + \delta U_1 = \delta v_2 + \delta U_2 = \delta N.$$

Тогда, основываясь на сделанном в начале настоящего параграфа предположении, что $\delta v_1 = \delta N$ (значение N в

стационарном режиме течения, очевидно, должно равняться нулю), и переходя к размерным переменным, придадим системе (15.7) следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} q_2 \delta v_1 + v_1 \delta q_1 &= q_2 \delta v_2 + v_2 \delta q_2, \\ v_1^2 \delta q_1 + 2q_1 v_1 \delta v_1 + \delta p_1 &= v_2^2 \delta q_2 + 2q_2 v_2 \delta v_2 + \delta p_2, \\ \left(\frac{v_1^2}{2} + q_1 \right) v_1 \delta q_1 + \left[q_1 v_1 \left(v_1 + \frac{v_2}{2} \right) + p_1 + \frac{1}{\kappa - 1} p_2 \right] \delta v_1 + \\ &+ \frac{\kappa}{\kappa - 1} v_1 \delta p_1 + q_1 v_1 \delta q = \\ &= \frac{v_2^2}{2} \delta q_2 - \left(\frac{3}{2} q_2 v_2^2 + \frac{\kappa}{\kappa - 1} p_2 \right) \delta v_2 + \frac{\kappa}{\kappa - 1} v_2 \delta p_2. \end{aligned} \right\} \quad (40.1)$$

Напомним, что q_1 — скрытая химическая энергия единицы массы горючей смеси. Отсутствие члена q_2 указывает, что в стационарном процессе предполагается полное сгорание ($\eta_{\text{сг}} = 1$). Из сравнения равенств (40.1), (15.2), (15.4) и (15.7) нетрудно видеть, что

$$\delta q = F(q_1; \eta_{\text{сг}}), \quad (40.2)$$

т. е. учитывается изменение теплоподвода как за счет изменения скрытой химической энергии единицы массы горючей смеси, так и за счет изменения полноты сгорания. В линейной задаче следовало бы написать $\delta q = \eta_{\text{сг}} \delta q_1 + q_1 \delta \eta_{\text{сг}}$, однако, в предположении, что наиболее существенная нелинейность связана с δq , здесь введена более общая запись.

Будем искать вид нелинейной функции δq . С этой целью следует прежде всего уточнить характер рассматриваемого физического процесса. Выберем некоторую идеализированную схему, наиболее легко осуществляемую в лабораторных условиях. Область теплоподвода с упомянутых выше лабораторных установок характеризуется двумя особенностями: стабилизирующие процесс горения плохо обтекаемые тела невелики по размерам, расположены достаточно густо и все лежат в одном сечении, так что длина области интенсивного горения за ста-

близаторами может быть принята малой по сравнению с длиной горячей части трубы (протяженность зоны обратных токов за стабилизаторами, грубо говоря, пропорциональна их диаметру); второй особенностью является то, что форсунки, подающие горючее, расположены в непосредственной близости от стабилизаторов (ξ_f на рис. 67 близко к нулю).

Представим эти особенности схемой, показанной на рис. 77. Пусть сечения 1 и 2 дают границы зоны подготовки смеси и горения, причем расстояние между ними l

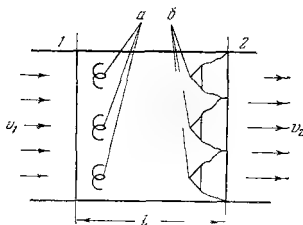


Рис. 77. Схема зоны горения, принятая в расчете.

мало. Предположим, что все впрыснутое форсунками *a* топливо мгновенно распространяется по всему объему между сечениями 1 и 2 и сгорает в сечении 2 за стабилизаторами *б*. В дальнейшем необходимое для этого время будет учтено введением времени запаздывания. Если считать, что горючее подается форсунками с постоянным расходом $\dot{G}_r = \text{const}$, независимо от колебаний газовой среды, то изменение содержания массы горючего в объеме области $\sigma V = lF$ (где F — сечение потока) будет равно:

$$\frac{1}{g} \dot{G}_r dt - \rho_r v F dt,$$

где ρ_r — средняя плотность горючего в объеме lF , а v — скорость потока.

Поделив полученное выражение на lF , найдем изменение плотности горючего в объеме lF :

$$d\rho_r = \frac{\frac{1}{g} \dot{G}_r - \rho_r v F}{lF} dt. \quad (40.3)$$

Это уравнение описывает изменение плотности горючего и в сечении 2, в котором происходит горение.

Для того чтобы проинтегрировать уравнение (40.3), следует задать $v = v(t)$. Будем рассматривать установившиеся колебания, т. е. положим

$$v = v_0 + A_v \sin \omega t. \quad (40.4)$$

После подстановки выражения (40.4) в уравнение (40.3) оно приобретает вид

$$\frac{d\rho_r}{dt} = A - B\rho_r - C\rho_r \sin \omega t. \quad (40.5)$$

Решение уравнения (40.5) не может быть представлено в элементарных функциях. На рис. 78 сплошными линиями дано численное решение этой задачи при условии, что в момент $t=0$ $\rho_r = 0$. Представленный пример взят для параметров течения в той лабораторной установке, на которой проводились эксперименты для сравнения теоретических расчетов с опытными данными. В расчете было принято, что $v_0 = 50$ м/сек, $A_v = 50$ м/сек, $l = 0,2$ м, а расход горючего $\dot{G}_r$ таков, что при отсутствии колебаний ($A_v = 0$) он даст $\rho_r = 0,008$ (это приблизительно соответствует коэффициенту избытка воздуха $\alpha = 1$). Здесь следует пояснить, почему амплитуда колебаний скорости A_v взята в рассматриваемом примере равной средней скорости течения v_0 . Дело в том, что в этом случае наиболее ярко проявляются особенности, которые приводят к возникновению нелинейных зависимостей между колебанием скорости и тепловыделением. Действительно, как видно из рис. 78, в рассматриваемом случае для $\Omega = 32$ гц σ_r колеблется от 0,004 до 0,0225, что соответствует колебанию коэффициента избытка воздуха от $\alpha = 2$ до $\alpha = 0,35$. Для $\Omega = 16$ гц этот диапазон еще шире. Совершенно ясно, что при таком колебании состава горючей смеси полнота сгорания будет изменяться сильнейшим

образом и безусловно не линейно. Более подробно этот вопрос будет рассмотрен ниже.

Из рис. 78 нетрудно видеть, что процесс колебаний q_r устанавливается очень быстро, а кривая $q_r = q_r(t)$ после

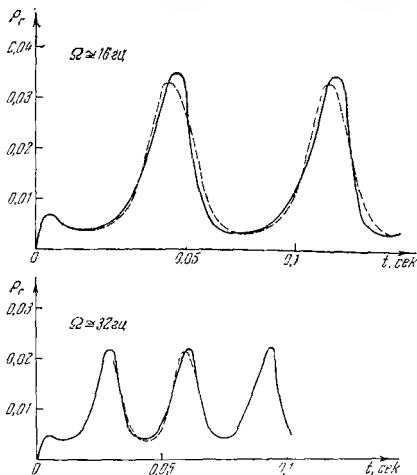


Рис. 78. Расчетное изменение количества горючего в зоне горения при колебании расхода воздуха в плоскости расположения топливных форсунок.

установления колебаний весьма близка по форме к сумме двух синусоид с отношением частот, равным 2. Поэтому будем искать приближенное решение уравнения (40.5) следующим образом.

Предположим, что приближенная зависимость $q_r = q_r(t)$ может быть записана в виде

$$q_r = q_{r0} + D \sin(\omega t + \varphi) + E \sin(2\omega t + \alpha). \quad (40.6)$$

Подстановка этого равенства в уравнение (40.5) позволяет найти входящие в (40.6) постоянные:

$$\left. \begin{aligned}
 \beta &= \operatorname{arctg} \frac{\omega}{B}, \quad \gamma = \operatorname{arctg} \frac{2\omega}{B}, \quad \alpha = \frac{\pi}{4} - \gamma, \\
 \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{\sin \beta + \frac{C^2}{4 \sqrt{\omega^2 + B^2} \sqrt{4\omega^2 + B^2}} \cos \alpha}{\frac{C^2}{4 \sqrt{\omega^2 + B^2} \sqrt{4\omega^2 + B^2}} \sin \alpha \cos \beta}, \\
 q_{r0} &= \frac{A}{B} - \frac{CD}{2B} \cos \varphi, \\
 D &= - \frac{\frac{A}{B}}{\frac{\sqrt{\omega^2 + B^2}}{C} \cos(\varphi + \beta) + \frac{C}{4 \sqrt{4\omega^2 + B^2}} \sin(\varphi + \alpha) + \frac{C}{2B} \cos \varphi}, \\
 E &= \frac{CD}{2 \sqrt{4\omega^2 + B^2}}.
 \end{aligned} \right\} \quad (40.7)$$

Чтобы проиллюстрировать точность найденного приближенного решения, на рис. 78 приведены пунктиром кривые, вычисленные по формулам (40.6) и (40.7). Поскольку совпадение с точным решением получается вполне удовлетворительным (это подтверждается и другими расчетами), в дальнейшем используется приближенная методика.

Функции $q_r = q_r(t)$ были получены для различных частот Ω и для различных амплитуд колебательной составляющей скорости A_v . На рис. 79 даны в качестве примера такие кривые для $\Omega = 48$ гц и для различных значений A_v . Аналогичные зависимости были построены также для $\Omega = 16, 32, 100$ гц (этот диапазон охватывает частоты, которые наблюдались на опытной установке).

В отличие от предыдущего примера, здесь и ниже предполагалось, что в отсутствии колебаний камера сгорания работает на $\alpha \cong 1,5$. На основании кривых $q_r = q_r(t, \Omega, A_v)$ строились кривые тепловыделения в функции времени. Для этого был использован условный график зависимости полноты сгорания от коэффициента избытка воздуха

(рис. 80). Функция $\eta_{\text{сг}} = \eta_{\text{сг}}(\alpha)$ (сознательно упрощенная) выражает главные свойства такой зависимости: в некотором диапазоне α (здесь $1 \leq \alpha \leq 2$) полнота сгорания практически постоянна и близка к единице. Слева и справа от этой области полнота сгорания резко падает, становясь равной нулю при сильно обогащенной и сильно

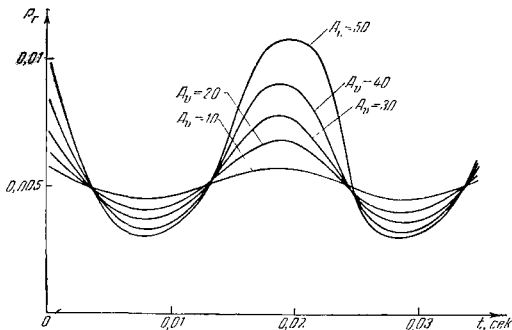


Рис. 79. Изменение количества горючего в зоне горения при разных амплитудах колебаний скорости в плоскости расположения топливных форсунок.

обедненной смеси (в рассматриваемом случае при $\alpha = 0,4$ и $\alpha = 4$). Нужно заметить, что уточнение этой зависимости не имело смысла. С одной стороны, это лишь незначительно изменило бы количественные, но не качественные результаты расчета, а, с другой стороны, уточненная по результатам опытов, поставленных на стационарных режимах, зависимость лишь с большой натяжкой могла бы использоваться в расчетах нестационарного (колеблющегося) горения.

Величины q_r и α , очевидно, обратно пропорциональны друг другу, если не учитывать колебаний плотности воздуха, связанных с колебаниями давления. Поскольку относительное колебание давления много меньше относи-

тельного колебания скорости, эта зависимость не учитывалась. Поэтому связь между q_r и α была принята следующей: $\alpha = \frac{0,0078}{q_r}$. Пользуясь этой связью между q_r и α и графиком $\eta_{cg} = \eta_{cg}(\alpha)$, строились кривые $q_r \eta_{cg} = f(t)$. Такие кривые выражают в некотором масштабе зависимость тепловыделения от времени. Эти графические зависимости разлагались далее в ряд Фурье, причем для

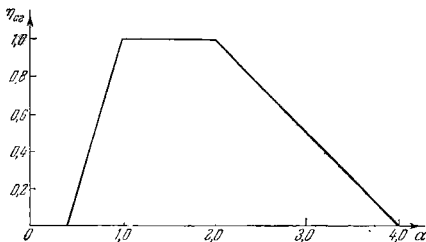


Рис. 80. Принятая в расчете зависимость мгновенной мощности сгорания от коэффициента избытка воздуха α .

каждой кривой выделялась первая гармоника ряда, соответствующая частоте колебаний скорости ω . Выделение этой гармоники физически оправдано — акустические колебания с частотой ω будут поддерживаться колебаниями тепловыделения, происходящими с той же частотой.

В результате подобного расчета получалась амплитуда искомой гармоники ряда Фурье A_1 и фазовый сдвиг ее относительно колебания скорости φ_1 :

$$\delta q = \text{const } A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \quad (40.8)$$

(химическая энергия единицы массы горючей смеси предполагается неизменной; она характеризуется введенной здесь размерной постоянной). Здесь

$$A_1 = A_1(A_c; \omega), \quad \varphi_1 = \varphi_1(A_c; \omega).$$

Расчеты, сделанные для указанных выше частот и для $A_v = 10; 20, 30, 40, 50, 60$ м/сек, показали, что значение φ_1 колеблется около π , лишь незначительно отклоняясь от этой величины. Поэтому оказалось возможным приять $\varphi_1 = \pi$. Зависимость $A_1 = A_1(A_v; \omega)$ изображена на рис. 81 для трех наиболее интересных частот. Кривые,

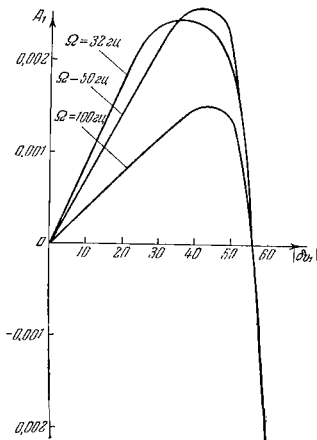


Рис. 81. Изменение амплитуды A_1 в функции абсолютной величины возмущения скорости перед зоной горения.

вычисленные для других частот, идут аналогично. Наиболее важными свойствами, общими всем кривым, являются следующие: кривые идут из начала координат, достигают максимума и вновь пересекают ось абсцисс где-то между $|\delta v_1| = A_v = 50$ м/сек и $|\delta v_1| = A_v = 60$ м/сек. Для облегчения дальнейших вычислений было решено пренебречь зависимостью A_1 от частоты. Такое пренебрежение не является слишком грубым — оно может привести только

к незначительному количественному изменению результатов, отнюдь не меняя их по существу. Форма кривой $A_1 = A_1(A_0)$ была приближенно представлена квадратичной параболой:

$$A_1 = 0,00000293 (56 - A_0) A_0. \quad (40.9)$$

Прежде чем переходить к дальнейшему изложению хода решения задачи, следует указать на причину, по которой в рассмотренном примере все кривые $A_1 = A_1(A_0)$ вторично пересекают ось абсцисс при $50 \text{ м/сек} < A_0 < 60 \text{ м/сек}$. Для малых частот этот эффект естествен — при достаточно больших A_0 периодически происходит сильное переобогащение и переобеднение смеси, что отрицательно сказывается на процессе горения. Для высоких частот такие процессы переобогащения и переобеднения не успевают развиться, зато продолжает действовать другой процесс, связанный с нарушением горения при $A_0 > v_0$. Когда колебательная составляющая скорости $|\delta v_1| = A_0$ становится больше средней скорости течения v_0 , поток начинает двигаться в обратном направлении, а процесс горения на стабилизаторах (расположенных около сечения 2) прекращается, поскольку прекращается доступ к ним свежей смеси (продолжающееся на свободной поверхности раздела холодных и горячих газов горение играет сравнительно небольшую роль). Это состояние длится не только в течение времени движения продуктов сгорания в отрицательном направлении оси x , но и тогда, когда возобновляется течение в положительном направлении, до тех пор, пока в зону стабилизаторов не начнет поступать свежая смесь. После этого в течение некоторого времени горение идет очень плохо, поскольку свежая смесь оказывается сильно переобогащенной — ведь она трижды пересекала область расположения форсунок (прямое пересечение, затем возвращение смеси при течении газов в отрицательном направлении и, наконец, вновь пересечение при движении в положительном направлении). Эти обстоятельства сказались при построении кривых $Q_{г\eta_{сг}} = f(t)$, на основании которых находились значения A_1 . Именно эти явления, связанные с забросом пламени в область перед стабилизаторами, приводят к резкому уменьшению A_1 при $A_0 > v_0$.

§ 41. Автоколебания при отсутствии потерь на концах трубы

В предыдущем параграфе были получены нелинейные соотношения, описывающие процесс вибрационного горения в области σ . Ряд упрощений позволил свести нелинейность к одной квадратичной зависимости. Излагаемый ниже метод пригоден и для более сложных зависимостей, однако уточнение этих нелинейностей вряд ли целесообразно здесь, поскольку процесс вибрационного сгорания при больших амплитудах колебаний скорости течения еще очень плохо изучен. В этих условиях всякого рода уточнения, которые можно ввести в настоящее время, неизбежно были бы перекрыты грубыми предположениями о характере процесса горения. Поэтому принятая в предыдущем параграфе идеализация описывает лишь основные, решающие стороны изучаемого явления.

Будем, в отличие от предыдущих глав, решать задачу в переменных (u, w) вместо $(\delta p, \delta v)$. (Связь между ними дается формулами (4.5).) Переход к переменным (u, w) обусловлен следующими соображениями. Возбуждение колебаний связано, как известно из предыдущего, с амплитудой и с фазой δq относительно фазы колебания воздушных масс. Для того чтобы следить за этими параметрами в переменных $(\delta p; \delta v)$, пришлось бы одновременно следить как за фазами δp и δv , так и за их амплитудами, поскольку последние изменяются с изменением частоты колебаний (при заданном положении области теплоподвода σ по длине трубы) вследствие изменения стоячих волн δp и δv . Переменные (u, w) вне зависимости от частоты колебаний имеют постоянные вдоль оси течения амплитуды, что дает возможность при решении задачи следить лишь за изменением фазовых соотношений.

В настоящем параграфе рассматривается случай, когда потери на концах трубы отсутствуют. Как уже говорилось, этому соответствуют краевые условия в виде узлов δp или δv . Примем, для определенности, что система имеет на обоих концах узлы давления $\delta p = 0$. В новых переменных это условие примет вид

$$u = w.$$

$$(41.1)$$

Действительно, согласно формулам (4.5)

$$\delta p = \frac{1}{2}(u - w); \quad \delta v = \frac{1}{2} \frac{u + w}{qa}, \quad (41.2)$$

откуда сразу следует условие (41.1).

Пусть начало координат будет совмещено с плоскостью Σ (рис. 22), причем введенные переменные будут иметь в этой плоскости значения u_0 и w_0 . Если координата конца трубы равна ξ , то, основываясь на выражениях для u и w (4.12) и пользуясь условием (41.1), можно написать следующее равенство:

$$u_0 \exp\left(i\omega \frac{\xi}{M+1}\right) = w_0 \exp\left(-i\omega \frac{\xi}{M-1}\right).$$

В этом равенстве принято, что $\beta = i\omega$, т. е. предположено, что колебания установились. Если обозначить фазовый сдвиг между u_0 и w_0 через γ , то последнее равенство дает возможность найти его значение

$$\gamma = \frac{2}{M^2 - 1} \omega \xi. \quad (41.3)$$

Очевидно, что в рассматриваемой задаче надо будет различать два угла γ : один, соответствующий левой, другой — правой стороне поверхности разрыва Σ . Отличаться они будут тем, что для левой стороны этот угол будет зависеть от величины M_1 , ω_1 и ξ_1 , а для правой — от M_2 , ω_2 и ξ_2 .

Для того чтобы установить взаимные сдвиги по фазам между величинами u_0 и w_0 слева и справа от Σ , надо ввести еще один угол, например между u_0 для левой стороны и u_0 для правой. Обозначим этот угол через α . Тогда, направив u_0 для левой (холодной) стороны Σ по оси абсцисс, можно будет изобразить векторную диаграмму для u_0 и w_0 , как показано на рис. 82.

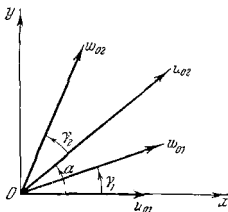


Рис. 82. Схема отсчета углов на векторной диаграмме величин u и w .

Угол α определяется свойствами поверхности Σ , которые записаны системой (40.1). Используя первое уравнение этой системы и условие изэнтропичности для холодной части течения $\delta Q_1 = \frac{\delta p_1}{a_1^2}$, исключим δQ_1 и δQ_2 из двух последних уравнений системы. С помощью формул (41.2) перейдем далее к системе переменных u и w . Пусть рассматриваемый численный пример характеризуется следующими данными:

$$q_1 = 0,125 \frac{\text{кг} \cdot \text{сек}^2}{\text{м}^4}; \quad v_1 \approx 50 \text{ м/сек}; \quad p_1 = 10\,000 \text{ кг/м}^2;$$

$$T_1 = 300^\circ \text{K}; \quad T_2 = 1800^\circ \text{K}.$$

Тогда после выполнения вычислений система (40.1) примет следующий вид (здесь индексы 01 соответствуют левой, а индексы 02 правой стороне плоскости Σ):

$$\left. \begin{aligned} u_{02} &= 0,583 u_{01} - 0,175 w_{01} + 0,00289 \delta q, \\ w_{02} &= -0,385 u_{01} + 0,792 w_{01} + 0,00603 \delta q. \end{aligned} \right\} \quad (41.4)$$

Система (41.4) связывает векторные величины. Для перехода к скалярным соотношениям спроектируем эти векторные равенства на оси x и y (рис. 82). Из полученных проектированием четырех равенств исключим $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$. Учтем далее, что согласно формулам (41.2) при установившихся колебаниях амплитуды u и w не зависят от ξ , т. е. на основании принятых краевых условий $|u_{01}| = |w_{01}|$ и $|u_{02}| = |w_{02}|$. Тогда получим после соответствующих преобразований следующие скалярные соотношения:

$$\left. \begin{aligned} u_{01} (0,583 \cos \gamma_2 - 0,175 \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 + \\ + 0,175 \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 + 0,792 \cos \gamma_1 + 0,385) = \\ = (0,00603 - 0,00289 \cos \gamma_2) \delta q_x + 0,00289 \sin \gamma_2 \delta q_y, \\ u_{01} (0,583 \sin \gamma_2 - 0,175 \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 - \\ - 0,175 \sin \gamma_1 \cos \gamma_2 - 0,792 \sin \gamma_1) = \\ = (0,00603 - 0,00289 \cos \gamma_2) \delta q_y - 0,00289 \sin \gamma_2 \delta q_x. \end{aligned} \right\} \quad (41.5)$$

У величин u_{01} в последних равенствах опущен знак абсолютной величины, так как выше было введено условие, что вектор u_{01} всегда направлен в положительную сторону оси абсцисс. Входящие в правые части величины δq_x и δq_y являются проекциями δq на оси x и y .

Найдем теперь значения δq_x и δq_y . В рассматриваемом численном примере постоянная, входящая в формулу (40.8), равна $2,27 \cdot 10^8 \frac{\text{м}^6}{\text{кг} \cdot \text{сек}^4}$. Выше уже указывалось, что в расчет следует ввести лишь первую гармонику разложения функции δq в ряд Фурье, которая определяется равенством (40.9). Воспользовавшись формулой для δv (41.2), нетрудно найти величину $|\delta v_{01}|$, совпадающую по определению с A_0 из (40.9):

$$|\delta v_{01}| = \frac{1}{2a_{1Q_1}} |u_{01} + w_{01}| = \frac{u_{01}}{2a_{1Q_1}} \left| 1 + \exp i\omega_1 \frac{2\xi_1}{M_1^2 - 1} \right|.$$

Используя равенство (41.3), полученной формуле можно придать следующий вид:

$$A_0 = |\delta v_{01}| = \frac{u_{01}}{2a_{1Q_1}} \sqrt{2(1 + \cos \gamma_1)}. \quad (41.6)$$

Учитывая лишь первую гармонику разложения в ряд Фурье, на основании формул (40.8) и (40.9), (41.6) напишем:

$$\delta q = 665 \left(56 - \frac{u_{01}}{87} \sqrt{2(1 + \cos \gamma_1)} \right) \frac{u_{01}}{87} \sqrt{2(1 + \cos \gamma_1)}.$$

Здесь δq численно равно абсолютной величине $|\delta q|$, однако при $A_0 > 56$ может принимать отрицательные значения. Поэтому знак абсолютной величины в левой части равенства опущен.

Фаза δq уже была определена выше (относительно δv_1): $\varphi_1 \approx \pi$, т. е. можно считать, что теплоподвод δq колеблется в противофазе со скоростью δv_1 . Как следует из второго равенства (41.2), в силу условия $|\omega| = u$ вектор δv будет направлен по биссектрисе угла между u и w , т. е. в соответствии с рис. 83 для левой стороны плоскости Σ будет идти под углом $\frac{\gamma_1'}{2}$ к оси абсцисс, совпа-

дающей с направлением u_{01} . Угол γ'_1 следует отличать от угла γ_1 . Последний может иметь любую величину, в то время как первый по абсолютному значению

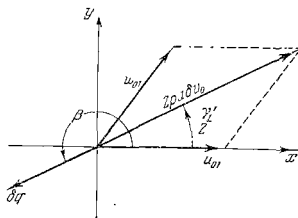


Рис. 83. Определение направления вектора δq при отсутствии потерь и запаздывания.

не превышает π , так как он используется для построения биссектрисы. Связь между γ_1 и γ'_1 дается очевидным равенством

$$\gamma'_1 = \gamma_1 - 2k\pi,$$

где целое число k выбирается так, чтобы

$$-\pi < \gamma'_1 < \pi.$$

С учетом вышесказанного нетрудно видеть, что фазовый угол δq относительно u_{01} будет равен $\frac{\gamma'_1}{2} + \pi$. Введем обозначение

$$\beta = \pi + \frac{\gamma'_1}{2}, \quad (41.7)$$

получим очевидные выражения для проекций вектора δq на координатные оси:

$$\left. \begin{aligned} \delta q_x &= \delta q \cos \beta, \\ \delta q_y &= \delta q \sin \beta. \end{aligned} \right\} \quad (41.8)$$

В рассматриваемом случае это даст:

$$\left. \begin{aligned} \delta q_x &= 665 \left(56 - \frac{u_{01}}{87} \sqrt{2(1 + \cos \gamma_1)} \right) \times \\ &\quad \times \frac{u_{01}}{87} \sqrt{2(1 + \cos \gamma_1)} \cos \beta, \\ \delta q_y &= 665 \left(56 - \frac{u_{01}}{87} \sqrt{2(1 + \cos \gamma_1)} \right) \times \\ &\quad \times \frac{u_{01}}{87} \sqrt{2(1 + \cos \gamma_1)} \sin \beta. \end{aligned} \right\} (41.9)$$

Подстановка найденных значений δq_x и δq_y в систему (41.5) позволяет найти две искомые величины — круговую частоту колебаний ω_1 и амплитуд u_{01} . Этими величинами полностью определяются все параметры колеблющейся системы.

Прежде всего следует указать, что решением системы будет $u_{01} = 0$ вне зависимости от частоты ω_1 . Однако это решение (отсутствие колебаний) интереса не представляет.

Предположив, что $u_{01} \neq 0$, сократим левые и правые части обоих уравнений (41.5) с учетом формул (41.9) на u_{01} . Тогда система (41.5) станет линейной, неоднородной относительно переменной u_{01} . Величина u_{01} легко уединяется в каждом из двух уравнений системы. Принимая ω_1 за параметр, будем строить кривые u_{01} в функции ω_1 по обоим уравнениям. Точки пересечения этих кривых дадут искомые решения.

До сих пор делалось предположение, что в зоне горения нет никакого запаздывания. Такое предположение явно необоснованно. Действительно, как процесс распыла горючего форсунками, так и процессы смешения, испарения, воспламенения требуют известного времени. Это запаздывание приведет к тому, что фаза теплоподвода будет сдвинута относительно u_{01} не на угол β , а на некоторый угол $\beta + \theta$. Поскольку возможные величины запаздывания неизвестны, будем варьировать θ с тем, чтобы оценить влияние этого фактора на режим установившихся автоколебаний.

На рис. 84 приведена диаграмма границ устойчивости, построенная на основании уравнений (40.1) методом, описанным в § 19 (область, соответствующая неустойчивости,

заштрихована). Приведенная на рис. 83 диаграмма показывает, что угол ϑ , прибавляемый к β для учета явлений запаздывания, следует отсчитывать от направления, противоположного направлению вектора δv . При построении границ устойчивости, изображенных на рис. 84, δv было направлено в положительную сторону оси ординат

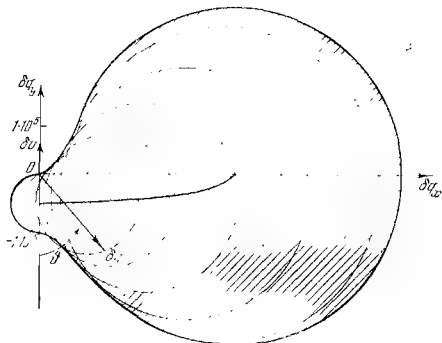


Рис. 84. Диаграмма устойчивости для расчетного примера.

и поэтому угол ϑ отсчитывается от отрицательного направления оси ординат. Обозначим через ϑ' угол вектора δq с направлением, обратным δv , в предположении вполне определенной ориентации вектора δp (вправо). При заданном угле γ_1 всегда легко установить взаимное расположение δv и δp и произвести отсчет угла ϑ' , который будет либо совпадать с ϑ , либо отличаться от него знаком. При переходе от $|\delta v_{01}| < 56$ м/сек к $|\delta v_{01}| > 56$ м/сек, как это видно из формул (40.8) и (40.9), величина δq меняет знак. Поскольку в методике расчета границ устойчивости δq может менять знак только путем поворота, для получения угла ϑ' при $|\delta v_{01}| > 56$ м/сек к фазе δq следует прибавлять π . Таким образом, переход от ϑ к ϑ' в зависимости от взаимной ориентировки δv и δp следует

производить по таким формулам:

$$\text{при } |\delta v_{01}| < 56 \text{ м/сек } \vartheta' = \vartheta \quad \text{или} \quad \vartheta' = -\vartheta,$$

$$\text{при } |\delta v_{01}| > 56 \text{ м/сек } \vartheta' = \pi + \vartheta \text{ или } \vartheta' = \pi - \vartheta.$$

При таком правиле отсчета углов ϑ' приведенная диаграмма границ устойчивости позволяет ожидать, что возбуждение колебательной системы будет происходить приблизительно при $-90^\circ < \vartheta' < 140^\circ$.

Подробные расчеты, проведенные по описанной выше методике, подтверждают это. Ниже приводятся результаты таких расчетов. В таблице характеристик автоколебаний, помимо частот ω_1 и амплитуд колебания скорости $|\delta v_{01}|$, удовлетворяющих системе (41.5), даны еще углы ϑ' . Все три величины построены в функции угла ϑ . В таблице прочеркнуты случаи, для которых не существует решений системы (41.5), если ограничиться первыми тремя гармониками. Все расчеты проделаны, для определенности, для среднего положения плоскости Σ по длине трубы: $\xi_1 = -0,5$; $\xi_2 = 0,5$. Это положение зоны теплоподвода соответствует используемым ниже опытными данным.

Характеристика автоколебаний

ϑ	1-я гармоника			2-я гармоника			3-я гармоника		
	ϑ'	ω_1	$ \delta v_{01} $	ϑ'	ω_1	$ \delta v_{01} $	ϑ'	ω_1	$ \delta v_{01} $
0°	—	—	—	—	—	—	0°	12,5	54,7
30°	—	—	—	30°	7,5	51,7	30°	12,5	55,8
60°	$*120^\circ$	*4,5	*58,5	60°	7,9	49,7	60°	12,5	55,2
90°	$*90^\circ$	*4,7	*56,8	90°	8,1	52,0	90°	12,4	55,7
120°	$*60^\circ$	*4,7	*57,0	120°	8,2	47,2	—	—	—
150°	$*30^\circ$	*5,1	*58,0	—	—	—	$*330^\circ$	*12,5	*56,2
180°	—	—	—	—	—	—	$*0^\circ$	*12,5	*56,2
210°	—	—	—	$*30^\circ$	*7,1	*63,2	$*30^\circ$	*12,5	*56,2
240°	120°	4,5	51,5	$*60^\circ$	*7,9	*58,2	$*60^\circ$	*12,5	*57,0
270°	90°	4,7	53,7	$*90^\circ$	*8,0	*60,8	$*90^\circ$	*12,6	*57,0
300°	60°	4,7	53,3	$*120^\circ$	*8,1	*66,8	—	—	—
330°	30°	5,1	52,0	—	—	—	330°	12,5	54,8

Относительно приведенных в таблице решений системы (41.5) надо сделать одно замечание. Полученные здесь

решения следовало бы проанализировать с точки зрения устойчивости этих периодических решений, по аналогии с теорией автоколебательных систем, для которых известны устойчивые и неустойчивые предельные циклы. Однако такой анализ здесь проводиться не будет. Вместо этого приведем приближенные качественные соображения, которые позволяют разбить все решения на два типа. К первому типу отнесем решения, дающие $|\delta v_{01}| < 56$ м/сек, а ко второму — дающие $|\delta v_{01}| > 56$ м/сек.

Для решений первого типа по мере развития колебаний (увеличения $|\delta v_{01}|$) вектор δq будет первое время направлен в заштрихованную область диаграммы, изображенной на рис. 84 (это видно из значений углов ϑ'), и система будет неустойчивой (амплитуды колебаний будут увеличиваться). После перехода через значение $|\delta v_{01}|_I$, соответствующее решению, она станет устойчивой; это видно из того, что дальнейшее увеличение $|\delta v_{01}|$ приведет вскоре к изменению знака A_1 , т. е. к повороту вектора δq на π , после которого он будет направлен в незаштрихованную область на рис. 84. Таким образом, решения первого типа дают устойчивые колебания: при $|\delta v_{01}| < |\delta v_{01}|_I$ колебания будут увеличивать свою амплитуду, при $|\delta v_{01}| > |\delta v_{01}|_I$ — уменьшать.

Относительно решений второго типа можно привести аналогичные соображения, которые указывают, что в этом случае устойчивые стационарные колебания невозможны. Действительно, обозначив амплитуду колебания скорости для решения второго типа через $|\delta v_{01}|_{II}$, легко сообразить, что если при $|\delta v_{01}| = |\delta v_{01}|_{II}$ угол ϑ' таков, что вектор δq направлен в заштрихованную область на рис. 84, то при $|\delta v_{01}| < 56$ м/сек $< |\delta v_{01}|_{II}$ он будет заведомо направлен в незаштрихованную часть диаграммы. Это означает, что амплитуды δv_{01} будут уменьшаться со временем и автоколебания прекратятся. Поэтому решения второго типа помечены в таблице звездочками и в дальнейшем анализе учитываться не будут.

Таблица, как и диаграмма границ устойчивости, наглядно свидетельствует, что величина угла ϑ (т. е. запаздывание) может играть заметную роль. В зависимости от ϑ будет возбуждаться та или иная гармоника, или возбуждение колебания окажется невозможным. Впрочем,

этот результат был очевиден. Наиболее интересным обстоятельством следует признать то, что вне зависимости от величины угла ϑ в тех случаях, когда происходит самовозбуждение, амплитуду колебаний можно считать практически неизменной. При этом величина амплитуды колебания скорости несколько превышает среднюю скорость течения $v_0 = 50$ м/сек. Следовательно, при установившихся автоколебаниях должен наблюдаться периодический заброс пламени в область перед стабилизатором.

Этот эффект многократно наблюдался в опытах. В частности, в специальных опытах, путем установки кварцевых окон в стенках трубы и скоростной киносъемки процесса вибрационного горения, удавалось зарегистрировать заброс пламени вверх по потоку. В нормальных режимах горения боковая поверхность стабилизаторов получалась на фотографиях темной. При развившихся автоколебаниях она периодически (с частотой наблюдавшихся колебаний) закрывалась пламенем, забрасываемым в зону перед стабилизаторами.

Еще более интересно сравнивать амплитуды колебаний давления, полученные расчетным путем, с наблюдавшимися в опыте, поскольку колебания давления легко измерить. Оценим теоретическое значение амплитуды колебаний давления в сечении, где расположена пучность давления:

$$\delta p|_{\max} = \frac{u \cdot w}{2} |_{\max}.$$

С учетом краевого условия $|u| = |w|$ это даст $|\delta p|_{\max} = |u|$. Значения $u_{01} = |u| = |\delta p|_{\max}$ для решений первого типа, соответствующих первой, второй и третьей гармоникам колебательной системы, даны в нижеследующей таблице:

Таблица значений $|\delta p|_{\max}$ кг/м²

ϑ	0°	30°	60°	90°	120°	150	180	210	240	270	300	330
1-я гарм.	—	—	—	—	—	—	—	—	3350	3150	3180	2650
2-я гарм.	—	2950	3550	3950	4250	—	—	—	—	—	—	—
3-я гарм.	2400	2450	2420	2445	—	—	—	—	—	—	—	2400

В опытах, которые ставились с целью сравнения теоретически полученных величин с экспериментально зарегистрированными, были реализованы принятые в расчете величины q_1 ; ν_0 и т. д. В многократных экспериментах, отличавшихся организацией процесса горения, регистрировались амплитуды колебания давления перед зоной горения. При развившихся автоколебаниях эти амплитуды имели значения, лежащие между 2200 и 3500 кг/м². Несколько пониженные по сравнению с теоретическим расчетом значения $|\delta p|$ объясняются, в частности, тем, что датчики давления не всегда ставились в пучности давления, и, конечно, грубой идеализацией процесса в расчетной схеме.

Однако совпадение расчетных и опытных данных следует признать весьма удовлетворительным. Оно свидетельствует о том, что в принятой грубой схеме явления были учтены наиболее существенные нелинейные свойства зоны теплоподвода.

§ 42. Автоколебания при наличии потерь на концах трубы

В отличие от задачи, рассмотренной в предыдущем параграфе, поток акустической энергии, излучаемой областью теплоподвода σ , не будет равен потоку энергии того же вида, возвращающемуся в область σ после отражения акустических волн от концов трубы. Поэтому в среднем за цикл колебания будет наблюдаться течение акустической энергии от области σ к концам трубы. Аналитически это выразится в том, что амплитуды u и w перестанут быть равными друг другу.

В § 30 приводились формулы для учета потерь, связанных с излучением акустической энергии из открытых концов трубы. Там, в частности, был введен коэффициент ζ (определенный равенством $w = \zeta u$), использование которого вместо импеданса z целесообразно при решении задач в координатах (u, w) . При излучении акустической энергии во внешнее пространство, средний поток ее направлен в положительную сторону оси x в горячей части трубы и в противоположном направлении в холодной части трубы. Поэтому, вспомнив выражение для потока

акустической энергии (30.7), будем иметь $|\zeta_1| > 1$, а $\zeta_2 < 1$.

После сделанных здесь вводных замечаний нетрудно построить методику расчета для рассматриваемого в настоящем параграфе случая. Ход решения задачи мало чем отличается от того, который подробно описан в предыдущем параграфе. Все отличия, которые следует иметь в виду, являются следствием новых краевых условий. При нахождении углов γ_1 и γ_2 между векторами u_{01} и w_{01} ; u_{02} и w_{02} нельзя пользоваться формулой (41.3), которая получена из предположения, что u и w на концах трубы совпадают. Равенство

$$w = \zeta u \quad (42.1)$$

показывает, что они, вообще говоря, сдвинуты на некоторый угол θ , который можно определить из соотношения (30.5):

$$\theta = \operatorname{arctg} \left(- \frac{2x}{1-r^2 x^2} \right),$$

где r и x — вещественная и мнимая части импеданса $z = r + ix$. При этом следует иметь в виду, что знак числителя стоящего справа выражения, пропорционального $\sin \theta$, определяет четверть, в которой лежит угол θ .

Таким образом, вместо формулы (41.3) надлежит пользоваться следующей:

$$\gamma = \frac{2}{M^2 - 1} \omega \xi + \theta. \quad (42.2)$$

Точно так же, при переходе к равенствам, не содержащим угла α и величин w_{01} , u_{02} , w_{02} , вместо условий $|u_{01}| = |w_{01}|$ и $|u_{02}| = |w_{02}|$ надо пользоваться следствиями новых краевых условий вида (42.1):

$$\left. \begin{aligned} |w_{01}| &= |\zeta_1| |u_{01}|, \\ |w_{02}| &= |\zeta_2| |u_{02}|, \end{aligned} \right\} \quad (42.3)$$

причем величина ζ легко находится из формулы (30.6).

Кроме того, фазовый угол δq относительно u_{01} при отсутствии запаздывания ($\vartheta = 0$), обозначенный выше через β , не будет более равен $\pi + \frac{\gamma_1}{2}$, поскольку вектор δu

не будет располагаться по биссектрисе угла γ'_1 . Из рис. 85 видно, что теперь $\beta = \pi + \gamma''_1$, где

$$\gamma''_1 = \operatorname{arctg} \frac{|\xi_1| \sin \gamma_1}{1 + |\xi_1| \cos \gamma_1}.$$

При $|\xi_1| = 1$ (отсутствие потерь на концах) угол γ''_1 совпадает, как это и следовало ожидать, с $\frac{\gamma'_1}{2}$.

Опуская громоздкие выкладки, найдем окончательную систему уравнений, соответствующую системе (41.5),

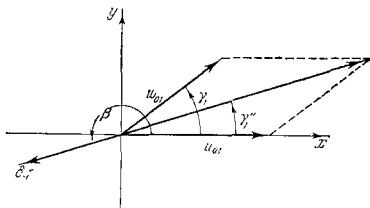


Рис. 85. Определение направления вектора δq при наличии потерь.

с учетом равенств (41.6), (42.2) и (41.9) для рассматриваемого численного примера:

$$\left. \begin{aligned} u_{01} [0,000508 |\xi_2| (1 + \cos \gamma_1) \cos (\gamma_2 + \gamma'_1) - \\ - 0,00106 (1 + \cos \gamma_1) \cos \gamma'_1] = -0,385 + \\ + 0,792 |\xi_1| \cos \gamma_1 - 2,58 \sqrt{2(1 + \cos \gamma_1)} \cos \gamma'_1 - \\ - 0,583 |\xi_2| \cos \gamma_2 + 0,175 |\xi_1| |\xi_2| \cos (\gamma_1 + \gamma_2) + \\ + 1,24 |\xi_2| \sqrt{2(1 + \cos \gamma_1)} \cos (\gamma_2 - \gamma'_1), \\ u_{01} [0,000508 |\xi_2| (1 + \cos \gamma_1) \sin (\gamma_2 + \gamma'_1) - \\ - 0,00106 (1 + \cos \gamma_1) \sin \gamma'_1] = 0,792 |\xi_1| \sin \gamma_1 - \\ - 2,58 \sqrt{2(1 + \cos \gamma_1)} \sin \gamma'_1 - 0,583 |\xi_2| \sin \gamma_2 + \\ + 0,175 |\xi_1| |\xi_2| \sin (\gamma_1 + \gamma_2) + \\ + 1,24 |\xi_2| \sqrt{2(1 + \cos \gamma_1)} \sin (\gamma_2 + \gamma'_1). \end{aligned} \right\} \quad (42.4)$$

Приведенная система решалась графически путем построения кривых $u_{01} = f_1(\omega_1)$ и $u_{01} = f_2(\omega_1)$ аналогично тому, как это делалось в предыдущем параграфе. Расчеты велись для разных отношений $\frac{d}{L}$ (d — диаметр трубы, L — ее длина), которые, как это видно из формулы (30.8), определяют потери на излучение.

Результаты расчетов для трех первых гармоник приведены на рис. 86. Наиболее четко влияние потерь на

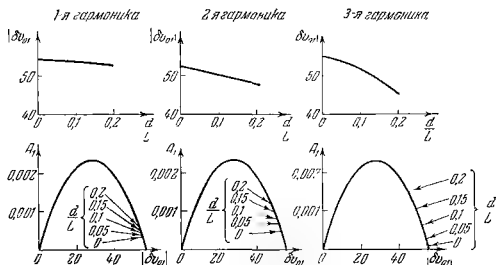


Рис. 86 Амплитуды автоколебаний $|\delta v_{01}|$ при различных потерях энергии на излучение (параметр d/L).

характеристики автоколебаний видно на примере третьей гармоники, поскольку потери увеличиваются пропорционально ω^2 . Значения углов ϑ , для которых производился расчет, были следующими: для первой гармоники $\vartheta = 270^\circ$, для второй $\vartheta = 90^\circ$, для третьей $\vartheta = 0^\circ$. Эти углы соответствуют полученным в предыдущем параграфе областям самовозбуждения. Частоты колебаний здесь не приводятся. Они почти не изменяются после введения в расчет потерь на концах; наблюдается лишь незначительное уменьшение частот автоколебаний.

В верхней части рис. 86 дано изменение амплитуд колебания скорости $|\delta v_{01}| = A$, в функции $\frac{d}{L}$. Как видно из

хода кривых, увеличение $\frac{d}{L}$ (увеличение потерь) сопровождается некоторым уменьшением амплитуд установившихся колебаний скорости.

В нижней части рис. 86 приведены графики принятой в расчете зависимости $A_1 = f(A_0)$, на которых помечены точки, соответствующие пайденым амплитудам колебаний скорости. Эти графики показывают, что если при отсутствии потерь $\left(\frac{d}{L} = 0\right)$ значение A_1 , а следовательно и колебательной составляющей тепловыделения δq близко к нулю, то при наличии потерь $\left(\frac{d}{L} \neq 0\right)$ она быстро возрастает, особенно для третьей гармоники. Результат этот вполне естествен, поскольку для принятой схемы процесса в области σ только достаточно большая колебательная составляющая теплопровода способна осуществить восполнение потерь акустической энергии на концах трубы.

Интересно отметить, что при достаточно больших потерях величина амплитуды колебательной составляющей скорости $|\delta v_{01}|$ становится меньше $v_0 = 50$ м/сек, т. е. явление заброса пламени против потока, о котором говорилось выше, может не наблюдаться. Правда, чтобы это произошло, труба должна быть достаточно «короткой».

Из этого следует, что в некоторых специальных случаях можно путем увеличения потерь получить вибрационное горение без заброса пламени.

При достаточно больших потерях возбуждение некоторой заданной гармоники может оказаться вообще не возможным. В рассматриваемом численном примере этому соответствует факт сужения диапазона значений ϑ , для которых возможно возбуждение автоколебаний по мере увеличения параметра $\frac{d}{L}$. Так, для третьей гармоники системы при $\frac{d}{L} = 0$ возбуждение было возможным (при принятых в расчете значениях ϑ) для $\vartheta = 330^\circ, 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ и 90° . При $\frac{d}{L} = 0,2$ автоколебания становятся возможными лишь при $\vartheta = 0^\circ$ и 30° , для $\vartheta = 330^\circ, 60^\circ$ и 90° система (42.4) решений не имеет.

§ 43. Применимость развитых методов в других случаях

Результаты теоретических расчетов, проведенных в настоящей главе, хорошо согласуются с опытными данными. В частности, хорошо подтверждаются ожидаемые порядки величин амплитуд колебаний давления и скорости. Однако, поскольку выше был рассмотрен только пример расчета, остается неясным, можно ли пользоваться аналогичным методом в других случаях.

Рассмотрим поэтому общую схему использованного в предыдущих параграфах метода расчета. Вкратце она сводится к следующему:

1. Делается предположение, что существенной нелинейностью при автоколебаниях рассматриваемого типа является какая-то закономерность процесса горения.

2. Основываясь на сделанном предположении, колебания слева и справа от зоны теплоподвода описываются линейными уравнениями. Это выражается в том, что для связи колебаний слева и справа на поверхности Σ с колебаниями на концах трубы используются формулы, полученные во второй главе.

3. При идеализации процесса нестационарного горения свойства поверхности Σ также пишутся в виде линейных соотношений, в которые включается возможно меньшее число возможно более простых нелинейных выражений, передающих главное нелинейное свойство зоны теплоподвода.

4. Проводится изолированное рассмотрение идеализированной зоны теплоподвода. Оно сводится к тому, что предполагаются заданными колебания перед зоной теплоподвода, причем варьируется частота и амплитуда колебаний. Путем расчета находятся свойства зоны теплоподвода (величины, от которых зависят $\bar{Q}^*$, $\bar{U}_1$ и P_x) в функции частоты и амплитуды колебаний. Найденные закономерности строятся в функции времени, разлагаются в ряд Фурье, причем сохраняется лишь первая гармоника (совпадающая с заданной частотой колебаний).

5. Используя полученную связь процесса в зоне теплоподвода с колебанием среды в окрестностях этой зоны, с одной стороны, формулы гл. II и краевые условия, с другой стороны, ищут частоты и амплитуды колебаний,

которые одновременно удовлетворяют всем этим соотношениям.

Полученные решения анализируются с точки зрения устойчивости найденных периодических режимов.

Из приведенной здесь краткой схемы расчета видно, что все ее пункты годятся для любого процесса в зоне теплоподвода и никак не связаны с конкретным видом горения, рассмотренным выше.

Если вместо того, чтобы изучать процесс, в котором основным механизмом возбуждения и поддержания колебаний является связь между смесеобразованием и горением, рассмотреть другой тип горения, то изменится лишь фактическое содержание пункта третьего приведенной схемы расчета. Во всем остальном весь ход вычислений может быть сохранен. Следует лишь добавить, что в зависимости от того, насколько сложным будет введенное нелинейное соотношение, может измениться объем вычислительной работы. Поэтому, как уже говорилось, нелинейное соотношение следует выбрать возможно более простым.

При упрощении нелинейных свойств плоскости Σ надо учитывать, что наиболее важным является не подробная передача нелинейной зависимости существенного свойства Σ (в предыдущем примере δq) от амплитуды колебания (в предыдущем примере от A_0), а сохранение характерных точек, соответствующих переходу этой нелинейной величины (например, δq) через нули. При этом сохраняются главные черты установившихся автоколебаний, а искажения будут внесены в сравнительно второстепенные закономерности переходных режимов от малых колебаний до установившихся автоколебаний. Эти переходные режимы здесь вообще не рассматриваются. Именно также соображения позволяли заменить сравнительно сложные кривые, приведенные на рис. 81, общей для всех кривых квадратичной параболой, проходящей через точки оси абсцисс $\delta v_1 = 0$ и $\delta v_1 = 56$ м/сек.

Можно было бы рассмотреть здесь для подтверждения сказанного и другие случаи вращающегося горения, например возбуждение колебаний в потоке заранее подготовленной горючей смеси при сжигании ее за некоторым поджигающим устройством — хотя бы газовой горелкой

(см. § 37). В этом случае при малых амплитудах колебаний скорости течения поверхность пламени будет тоже колебаться, не отрываясь от поджигающего источника. Эти колебания фронта пламени могут привести к неустойчивости вследствие периодического изменения объема $V_F(t)$ и связанного с этим появлением отличного от нуля возмущения скорости распространения эффективного плоского фронта пламени δU . При этом связь между колебаниями δv и δU будет линейной. Увеличение амплитуды колебания скорости δv приводит в конце концов к тому, что объемы горящего газа начинают периодически отрываться от поджигающего источника и эти отрывы делают необходимым изменение математической формы описания процесса горения. Возмущение δU перестает быть линейной функцией δv , так как после отрыва горящего моля от источника поджигания процесс горения в нем перестает зависеть от δv . В дальнейшем, при еще более сильных колебаниях скорости возникает явление заброса пламени в области, лежащие перед горелкой, и это еще более усложняет картину. Таким образом, в рассмотренном примере существенными нелинейностями будут свойства зоны горения, связанные с отрывом горящих молей от источника поджигания и явлением заброса пламени вверх по течению. Математическая формулировка этих нелинейных свойств не представляет труда, как только будет построена та или иная расчетная схема явления.

Вследствие большого числа реально существующих механизмов обратной связи подробное рассмотрение приведенного здесь примера не имеет смысла, так как это был бы в конечном итоге всего лишь еще один частный случай, который не смог бы добавить ничего существенного к результатам, полученным в этой главе.

ГЛАВА IX

ВИБРАЦИОННОЕ ГОРЕНИЕ

§ 44. Стадии развития процесса вибрационного горения

Выше уже указывалось на то, что вибрационное горение является типичным автоколебательным процессом. В тот момент, когда созрели необходимые условия, амплитуды колебаний совершают резкий и практически мгновенный скачок. Быстрое наступление вибрационного горения (обычно оно достигает установившейся амплитуды за время, равное 2-3 периодам колебаний) сильно затрудняет изучение стадий развития этого процесса. Однако в некоторых случаях, при опытах на специальных установках лабораторного типа, удастся проследить, как при постепенном изменении условий опыта (коэффициента избытка воздуха, положения по оси течения подвижного стабилизатора и т. п.) один вид установившихся автоколебаний сменяется другим видом. При этом обычно можно заметить, что разным видам автоколебаний соответствуют разные амплитуды.

Часто можно наблюдать, как первоначально хаотические колебания давления, после едва заметного изменения условий опыта, приобретают ярко выраженные свойства автоколебаний (четко выраженная и постоянная частота с постоянной амплитудой), хотя амплитуда колебаний и не увеличивается заметным образом. При дальнейшем (тоже едва заметном) изменении условий опыта возникают весьма мощные автоколебания. Это говорит о том, что малым и непрерывным изменениям условий опыта нередко соответствует не просто переход от спокойного горения к мощным автоколебаниям, как это иллюстрирует рис. 76, а ступенчатый переход от спокой-

ного (вернее сказать, хаотического) горения к автоколебаниям одного типа, а затем от этих автоколебаний к другим.

Основываясь на сказанном, можно рассматривать эти ступени в качестве стадий развития процесса вибрационного горения. Конечно, остается открытым вопрос о том, совпадают ли эти стадии (связанные с изменением условий опыта) с развитием процесса вибрационного горения во времени (без изменения в течение этого времени условий опыта). На известную близость этих двух явлений указывает следующий экспериментальный факт. Вызвав автоколебания малой амплитуды, экспериментатор иногда может наблюдать самопроизвольный переход системы к следующей стадии — мощным автоколебаниям.

Типичная картина смены трех перечисленных стадий горения может быть хорошо прослежена на примере развития вибрационного горения заранее подготовленной однородной смеси за коническим стабилизатором, установленным в трубе.

1-я стадия. На фотографиях, полученных скоростной киносъемкой, можно видеть особенности этого вида горения. Поверхность пламени за стабилизатором хотя и имеет изменяющуюся от кадра к кадру конфигурацию, в среднем дает обычную, приблизительно коническую поверхность горения, характерную для точечного источника поджигания. Изменение конфигурации фронта пламени от кадра к кадру говорит о возможности возникновения неустойчивости за счет подвижности фронта пламени. Какой-либо четкой регулярности в этом виде горения не наблюдается. Амплитуда колебаний давления незначительна.

2-я стадия. Эта стадия является переходной к мощным автоколебаниям. Она характеризуется явно выраженной периодичностью горения и достаточно большими амплитудами колебаний. Переход от первой стадии ко второй происходит практически мгновенно.

В зависимости от условий опыта (в частности, типа источника поджигания) вторая стадия может иметь свои особенности, вплоть до различных механизмов обратной связи. В рассматриваемом случае главным механизмом поддержания колебаний является периодический срыв

горящих молей со стабилизатора, наподобие срыва вихрей за плохо обтекаемым телом. Это явление уже описывалось выше (см. § 36, рис. 72).

3-я стадия. В отличие от второй стадии, имеющей тот или иной вид в зависимости от конкретных условий опыта, третья стадия внешне проявляется обычно одинаковым образом — забросом пламени вверх по потоку в области, лежащие перед стабилизатором (в тех случаях, когда горение происходит в следе за поджигающим источником).

В гл. VIII на частном примере было показано, что по мере развития колебаний они могут вырасти до стадии заброса пламени вверх по потоку, причем этот заброс вызовет такие изменения в процессе горения, которые можно рассматривать как причину появления в уравнениях, описывающих вибрационное горение, существенных нелинейностей, ограничивающих амплитуды колебаний.

В той же главе было указано, что этот вывод можно распространить и на другие случаи возбуждения рассматриваемой колебательной системы, причем наряду с забросом пламени вверх по потоку было выявлено важное значение периодического отрыва пламени от удерживающих его источников поджигания.

То обстоятельство, что периодический заброс пламени вверх по потоку и обычно сопутствующий ему (через полпериода) отрыв пламени от источников поджигания приводит к резкому изменению характера горения, вызывающему ограничение амплитуд колебаний, объясняет один и тот же характер третьей стадии вибрационного горения вне зависимости от предшествующей «истории» развития процесса колебаний.

Колебания рассматриваемого типа поддерживаются механизмом, отличным от описанных выше. Здесь уже нельзя говорить о вихреобразовании за стабилизатором и о колебаниях поверхности фронта пламени как о главных причинах поддержания вибрационного характера горения. Вероятно, здесь будет неточным даже само понятие «фронта пламени», понимаемого как некоторая поверхность достаточно малой толщины. Горение имеет здесь вследствие сильной турбулизации скорее объемный характер.

Горение такого рода, зафиксированное скоростной киносъемкой, показано на рис. 87. Схематически оно может быть описано следующим образом. Частица предва-

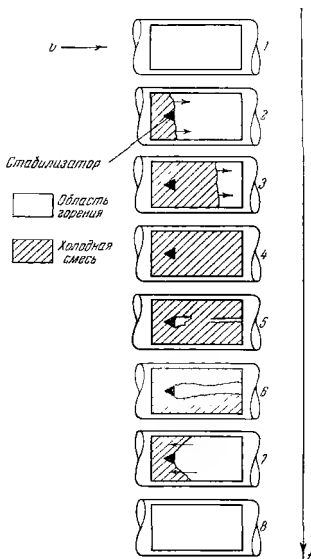


Рис. 87. Схема процесса горения при интенсивном «забросе» пламени в область, лежащую перед стабилизатором.

рительно заброшенных вверх по течению горящих газов приобретает при обратном движении большую скорость, и зона раздела сгоревшей и несгоревшей смеси пропосит- ся мимо стабилизатора, не сохраняя иногда видимого

горящего следа за ним. Но вскоре за стабилизатором возникает пламя; оно развивается иногда в виде начинающего светиться шнура в области аэродинамической тени (следа) за стабилизатором. Сильно вытянутая и сравнительно топкая область возникшего пламени начинает распространяться в радиальных направлениях, и к тому моменту, когда пламя заполняет все сечение трубы, вновь возникает заброс пламени.

Заброс пламени не является, конечно, обязательной формой наиболее развитых автоколебаний. Во многих случаях он просто невозможен: например, при сгорании угольной пыли в предтопке, пламени некуда «забрасываться», так как сгорание происходит в непосредственной близости от закрытого конца предтопка. Сказанное выше имело отношение только к горению в трубах за стабилизаторами. Однако описанный частный случай важен в том отношении, что он указывает на возможность существования стадий развития вибрационного горения, каждая из которых может иметь свой особый механизм возбуждения и поддержания колебаний. Это говорит о полной безнадежности найти какой-то один механизм, одну причину возникновения вибрационного горения. Не только различные лабораторные установки, двигатели или топки, но даже одна и та же простейшая лабораторная установка способна в течение одного запуска дать возможность проявиться различным механизмам вибрационного горения.

В заключение надо сказать несколько слов о вопросе, который часто возникает у лиц, недостаточно знакомых с теорией колебаний. Речь идет о так называемой «первой причине» возникновения автоколебаний. Если рассматривать режимы мягкого возбуждения автоколебаний (т. е. автоколебаний, возникающих от того, что исходный стационарный режим неустойчив по отношению к бесконечно малым возмущениям), то сама постановка вопроса о «первой причине» или «первом толчке» является абсурдной. Дело в том, что в случае неустойчивости стационарного режима по отношению к малым возмущениям, любое сколь угодно малое возмущение этого стационарного режима любой причиной (а таких причин в реальном потоке огромное множество) приведет к развитию неустой-

чивости и переходу к автоколебаниям, характер которых никак не зависит от типа начального возмущения. Ставить вопрос о «первой причине» в этом случае столь же бесполезно, как искать первую причину того, что карандаш, поставленный на остро отточенное острие, тут же падает.

Однако поиски «первой причины» не являются столь абсурдными, если в них вкладывается иное содержание. Поставим вопрос о механизмах обратной связи, которые могут проявиться уже при бесконечно малых возмущениях течения. По-видимому, не все рассмотренные в гл. VII механизмы обратной связи обладают этим свойством. Неясно, например, будет ли вихреобразование за стабилизатором или в холодной части течения подстраиваться к акустическим частотам при сколь угодно малых амплитудах акустических колебаний. Скорее всего, это не так, иначе срывы вихрей за стабилизатором перестраивались бы на акустические частоты и без горения. Поэтому можно говорить о механизмах обратной связи, действующих с самого начала (к ним относится, например, механизм, связанный с волнообразованием на фронте пламени), и о механизмах, могущих проявиться лишь после того, как акустические колебания достигли известной величины. Если понимать, таким образом, под «первой причиной» не первый толчок, а совокупность механизмов обратной связи, способных действовать в начальные стадии развития вибрационного горения, то этот вопрос становится законным. Это соображение поясняет также, что вопрос о стадиях развития вибрационного горения не является надуманным.

§ 45. Гипотеза о максимуме акустической энергии, излучаемой областью теплоподвода

Большое число механизмов обратной связи, описанных в гл. VII, и возможность перехода от одного механизма возбуждения к другому в одном опыте, о котором шла речь в предыдущем параграфе, ставят вопрос о закономерностях, определяющих механизм возбуждения и поддержания колебаний в каждом конкретном случае.

Совершенно ясно, что условия опыта определяют некоторое множество вероятных механизмов обратной связи.

Так, если происходит горение однородной и заранее подготовленной смеси, то механизмы, связанные со смесеобразованием, не смогут проявиться. Однако такие ограничения (если они существуют) все же оставляют достаточно большое число вероятных механизмов обратной связи.

Более того, если даже известен ожидаемый механизм возбуждения, то почти всегда остается открытым вопрос о том, каковы будут амплитудные и фазовые соотношения между колебаниями газовых масс и процесса горения. Как правило, эти соотношения расчету не поддаются. Действительно, очень трудно, например, рассчитать фазу отрыва вихря в подводящем канале и его размеры. Если и можно рассчитать, например, фазу колебания состава смеси к моменту подхода ее к стабилизаторам, то учесть все многочисленные факторы, от которых зависит воспламенение этой смеси, сейчас невозможно. Невозможно рассчитать все периоды индукции, предсказать видоизменение конфигурации поверхности пламени и т. д. Таким образом, на пути предсказания вероятности вибрационных режимов работы двигателя или камеры сгорания встают серьезные трудности.

Однако, с другой стороны, множественность вероятных механизмов обратной связи и большое число «степеней свободы» у процесса горения (в том числе возможность возбуждения колебаний с различными частотами), делающих возможными реализацию самых различных соотношений амплитуд стоячих волн и фазовых сдвигов между процессом колебания газов и горением, могут облегчить задачу прогноза вибрационных режимов и указать на эффективные меры их подавления. Дело в том, что оба указанных обстоятельства (большое число возможных механизмов обратной связи и большая свобода в реализации амплитудных и фазовых соотношений) позволяют колебательной системе как бы выбирать механизм самовозбуждения и амплитудно-фазовые соотношения.

В этой связи можно выдвинуть следующую гипотезу: *в процессе развития вибрационного горения колебательная система стремится реализовать такой механизм возбуждения и такие амплитудные и фазовые соотношения, которые дают в конкретных условиях опыта максимум*

величины акустической энергии $\bar{A}_\Sigma$, излучаемой областью горения.

Сформулированная здесь гипотеза может быть пояснена следующим образом. Пусть одновременно существует множество различных возможных механизмов возбуждения, причем каждый из них имеет известную свободу в реализации амплитудно-фазовых соотношений. Тогда тот из них, который в конкретных условиях опыта дает наибольшую секундную работу $\bar{A}_\Sigma$, обгонит в своем развитии остальные и в конце концов станет решающим механизмом возбуждения для данного конкретного случая.

Приведенное пояснение дает возможность указать на одну существенную деталь: очевидно, здесь идет речь об отборе механизмов возбуждения по признаку $\bar{A}_\Sigma - \bar{A}_{\max}$ в процессе разгона колебаний. Когда колебания установились, величина потока акустической энергии $\bar{A}_\Sigma$ определяется потерями. При этом предполагается, что к моменту установления колебаний процесс, дающий в условиях опыта $\bar{A}_\Sigma = \bar{A}_{\max}$, уже успел обогнать в своем развитии другие возможные процессы.

Надо отметить, что выдвинутая гипотеза предполагает отсутствие (или малость) потерь акустической энергии. Если потерями пренебрегать нельзя, то приведенная выше формулировка требует уточнений. При наличии потерь нельзя просто говорить о наибольшем потоке энергии $\bar{A}_\Sigma$, генерируемой в области теплоподвода, а следует из этого потока вычитать указанные потери. В связи с этим получим следующую уточненную формулировку гипотезы о максимуме акустической энергии: колебательная система стремится реализовать такой процесс, который в конкретных условиях опыта даст максимум величины акустической энергии, излучаемой областью горения, за вычетом потерь.

Приведенное уточнение является совершенно необходимым, так как иначе из предложения о стремлении колебательной системы реализовать условие $\bar{A}_\Sigma = \bar{A}_{\max}$ следовало бы, что система должна стремиться осуществить процесс с наибольшими потерями, поскольку наибольшим потерям соответствует наибольшее значение $\bar{A}_\Sigma$.

в установившемся режиме колебаний. Ниже, при рассмотрении некоторых теоретических положений и при анализе опытных данных приведенное уточнение не используется, поскольку всюду делается предположение об относительной малости потерь.

Рассмотрим некоторые следствия из гипотезы о максимуме энергии $\bar{A}_\Sigma$. Пусть характеристики процесса горения (величины δE и δX) будут функциями одной и той же переменной, способной менять фазу и амплитуду, например, теплоподвода $\bar{Q}^*$ или эффективной скорости распространения пламени U_1 , или какой-либо другой величины. Тогда можно, чтобы не быть связанными конкретной зависимостью δE и δX от одной из названных величин, ввести, как и в § 19, переменную $\bar{Y}$, записав условия, связывающие колебания слева и справа от зоны теплоподвода в виде равенств (19.6):

$$\left. \begin{aligned} v_2 &= a_{11}\bar{v}_1 + a_{12}\bar{p}_1 + a_{13}\bar{Y}, \\ \bar{p}_2 &= a_{21}\bar{v}_1 + a_{22}\bar{p}_1 + a_{23}\bar{Y}. \end{aligned} \right\} \quad (45.1)$$

Если привести эти зависимости к каноническому виду (17.1), то их можно будет записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \delta E &= a_{11}\bar{v}_1 + a_{12}\bar{p}_1 + a_{13}\bar{Y}, \\ \delta X &= a_{21}\bar{v}_1 + a_{22}\bar{p}_1 + a_{23}\bar{Y}. \end{aligned} \right\} \quad (45.2)$$

В приведенной записи произведен переход от комплексных переменных к векторным, а одинаково обозначенные вещественные коэффициенты преобразований (45.1) и (45.2), конечно, отличаются друг от друга.

Связь между коэффициентами преобразований (45.1) и (45.2) весьма проста и находится в процессе численного приведения равенств (45.1) к каноническому виду. Ниже в настоящем параграфе будут всюду использоваться коэффициенты преобразования (45.2).

Пусть фазовый сдвиг между $\bar{v}_1$ и $\bar{p}_1$ будет $\frac{\pi}{2}$, т. е. $\bar{v}_1\bar{p}_1 = 0$. Это предположение соответствует случаю, когда средний поток акустической энергии в холодной части

течения равен нулю (например, при схеме процесса, изображенной на рис. 31).

Найдем для этого случая, воспользовавшись формулами (19.2) и (45.2), поток акустической энергии, излучаемой зоной теплоподвода:

$$\begin{aligned} \bar{A}_\Sigma = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{p}}_1 \delta E - \mathbf{v}_1 \delta X + \delta E \delta X) = \frac{1}{2} \{ a_{12}(1 + a_{22}) \bar{p}_1^2 + \\ + a_{21}(1 + a_{11}) \bar{v}_1^2 + [a_{13}(1 + a_{22}) + a_{12}a_{23}] \bar{p}_1 \bar{v}_1 + \\ + [a_{23}(1 + a_{11}) + a_{21}a_{13}] \bar{v}_1 \bar{Y} + a_{13}a_{23} \bar{Y}^2 \}. \quad (45.3) \end{aligned}$$

Поскольку фазовый сдвиг между $\bar{p}_1$ и $\bar{v}_1$ равен $\frac{\pi}{2}$, то удобно перейти к диаграмме того же типа, что и представленная на рис. 26. Для рассматриваемого случая она дана на рис. 88. Если обозначить проекции вектора $\bar{Y}$ на оси x и y через $\bar{Y}_x$ и $\bar{Y}_y$, то выражение для $\bar{A}_\Sigma$ (45.3) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{A}_\Sigma = \frac{1}{2} \{ a_{12}(1 + a_{22}) \bar{p}_1^2 + a_{21}(1 + a_{11}) \bar{v}_1^2 + \\ + [a_{13}(1 + a_{22}) + a_{12}a_{23}] \bar{p}_1 \bar{Y}_x + [a_{23}(1 + a_{11}) + a_{21}a_{13}] \bar{v}_1 \bar{Y}_y + \\ + a_{13}a_{23} (\bar{Y}_x^2 + \bar{Y}_y^2) \}. \quad (45.4) \end{aligned}$$

Здесь $\bar{p}_1$, $\bar{v}_1$, $\bar{Y}_x$ и $\bar{Y}_y$ — скалярные (вещественные) величины; первые две являются абсолютными величинами векторов $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{v}_1$, поскольку эти векторы по условию всегда направлены по осям x и y .

Сделаем теперь наиболее простое предположение о полной независимости $\bar{Y}^2$ от $\bar{p}_1$ и $\bar{v}_1$ и найдем такие значения $\bar{Y}$, которые соответствуют максимуму $\bar{A}_\Sigma$. Для этой цели приравняем нулю производные $\frac{\partial \bar{A}_\Sigma}{\partial \bar{Y}_x}$ и $\frac{\partial \bar{A}_\Sigma}{\partial \bar{Y}_y}$.

Несложные вычисления дают искомые значения $\bar{Y}_x = \bar{Y}_{x0}$, $\bar{Y}_y = \bar{Y}_{y0}$, соответствующие $\bar{A}_\Sigma = \bar{A}_{\max}$:

$$\left. \begin{aligned} \bar{Y}_{x0} &= - \frac{a_{13}(1 + a_{22}) + a_{12}a_{23}}{2a_{13}a_{23}} \bar{p}_1, \\ \bar{Y}_{y0} &= - \frac{a_{23}(1 + a_{11}) + a_{13}a_{21}}{2a_{13}a_{23}} \bar{v}_1. \end{aligned} \right\} \quad (45.5)$$

Формулы (45.5) указывают, что если предположение об $\bar{A}_\Sigma = \bar{A}_{\max}$ справедливо, колебательная система будет всегда стремиться иметь $\bar{Y}$, лежащие в одной четверти диаграммы, представленной на рис. 88. Действительно, поскольку $\bar{p}_1$ и $\bar{v}_1$ по условию всегда положительны, то вне зависимости от их величины знаки $\bar{Y}_{x0}$ и $\bar{Y}_{y0}$ полностью определяются выражениями, стоящими перед $\bar{p}_1$ и $\bar{v}_1$, а следовательно, определяется и четверть, в которой расположен вектор $\bar{Y}$. Численные расчеты показывают, что для $\bar{Y} = \bar{Q}^*$ и $\bar{Y} = \bar{U}_{\text{сгор}}$ (где $\bar{U}_{\text{сгор}}$ — безразмерная вариация скорости распространения фронта пламени, отличающаяся от $\bar{U}_1$ знаком), такой четвертью является четвертая.

Следовательно, хотя диаграммы границ устойчивости (рис. 27) указывают на возможность возбуждения колебаний при $\bar{Y}$, лежащем в первой, третьей и четвертой четвертях, в случае справедливости высказанной гипотезы колебательная система будет стремиться реализовать только последний случай.

Полученные для $\bar{Y}_{x0}$ и $\bar{Y}_{y0}$ формулы (45.5) требуют знания $\bar{p}_1$ и $\bar{v}_1$. Однако и эти величины, быть может с большим основанием, чем $\bar{Y}_x$ и $\bar{Y}_y$, колебательная система способна «выбирать», сообразуясь с условиями возбуждения. Действительно, соотношение между $\bar{p}_1$ и $\bar{v}_1$ определяется положением сечения теплоподвода Σ относительно стоячей волны, образовавшейся в холодной части течения. Последнее же определяется не столько геометрическим положением Σ по оси трубы (оно обычно задано), сколько помером возбуждаемой гармоник. Найдём поэтому соотношение между $\bar{p}_1$ и $\bar{v}_1$, которое соответствует $\bar{A}_\Sigma = \bar{A}_{\max}$ и предполагает, что условия экстремума (45.5) уже выполнены.

В рассматриваемом случае $\bar{p}_1$ и $\bar{v}_1$ связаны условием (19.12). Входящая в это соотношение постоянная определяет амплитуды колебаний; обозначим ее c^2 , т. е. положим

$$\bar{v}_1^2 + \bar{p}_1^2 = c^2. \quad (45.6)$$

Формулы (45.6) и (6.3) показывают, что можно написать такие выражения для $\bar{v}_1$ и $\bar{p}_1$:

$$\left. \begin{aligned} |\bar{v}_1| &= c \sin \varphi, \\ |\bar{p}_1| &= c \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (c > 0), \quad (45.7)$$

где φ — некоторый свободный параметр. Найдем φ , при котором $\bar{A}_\Sigma$ принимает экстремальное значение. Физически это означает, что ищется определенное соотношение между p_1 и v_1 в сечении, где расположена плоскость теплоподвода Σ . Реализация этого соотношения возможна лишь при возбуждении соответствующей гармоник; таким образом, по сути ищется та гармоника, возбуждение которой даст максимум потоку энергии A_Σ .

Здесь следует заметить, что задание φ (т. е. задание p_1 и v_1) определяет номера гармоник лишь в том случае, если одновременно задано краевое условие на левом конце трубы. Но не следует забывать, что надо, кроме того, удовлетворить еще краевому условию на правом конце. При заданных свойствах поверхности теплоподвода Σ и при ограниченном числе гармоник, которые фактически могут быть реализованы, среди найденных гармоник может не оказаться такой, которая одновременно точно удовлетворяла бы и краевому условию на правом конце. Поэтому все последующие рассуждения справедливы для реальных систем лишь в первом приближении. Они дают тенденцию поведения колебательной системы, а не точное решение краевой задачи. Это замечание следует постоянно иметь в виду при чтении настоящей главы.

Если подставить значения $\bar{Y}_{x0}$ и $\bar{Y}_{y0}$ (45.5) в выражение (45.4), то сразу находится следующая формула для $\bar{A}_\Sigma$:

$$\bar{A}_\Sigma = c_1 \bar{p}_1^2 + c_2 \bar{v}_1^2,$$

где c_1 и c_2 — некоторые вещественные коэффициенты. С учетом выражений (45.7) последнее равенство можно записать так:

$$\bar{A}_\Sigma = c^2 (c_1 \cos^2 \varphi + c_2 \sin^2 \varphi). \quad (45.8)$$

Взяв производную $\frac{dA_{\Sigma}}{d\varphi}$ и приравняв ее нулю, найдем значения φ , которые соответствуют экстремумам $\bar{A}_{\Sigma}$. Легко видеть, что если $c_1 \neq c_2$, это будут $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$. Поскольку по условию c_1 и $\bar{p}_1$ не могут быть отрицательными величинами, угол φ должен удовлетворять соотношению $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, откуда следует, что поток энергии $\bar{A}_{\Sigma}$ достигает экстремальных значений только при $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Численный анализ, произведенный для типичских значений коэффициентов преобразований (45.2), показал, что максимуму $\bar{A}_{\Sigma}$ соответствует $\varphi = 0$. Таким образом, если колебательная система имеет возможность свободного выбора как величины и фазы $\bar{Y}$, так и номера возбуждаемой гармоники, она будет стремиться реализовать такой процесс, при котором фазы $\bar{Y}$ и $\bar{p}_1$ будут совпадать¹⁾. Этот результат в какой-то мере напоминает гипотезу Рэля, хотя, по-существу, имеет совершенно иное содержание.

Надо сказать, что возможность свободного выбора величины и фазы $\bar{Y}$, а также номера возбуждаемой гармоники свойственна далеко не всем реальным процессам горения. Скорее это надо рассматривать как исключительный, предельный случай. В реальных процессах амплитуда $\bar{Y}$ может быть ограничена физическими свойствами явления, которые не позволяют достигнуть теоретически «оптимального» значения $|\bar{Y}|$, а фаза $\bar{Y}$ может оказаться связанной, например, с колебанием скорости. Наиболее четко это прослеживается для трубы Рунке, в которой теплоотдача от нагретой сетки к воздуху однозначно определяется частотой и амплитудой колебания скорости воздуха, обтекающего элементы сетки,

1) Последнее следует, например, из равенств (45.5). При $\varphi = 0$ $\bar{y}_1 = 0$ и, следовательно, $\bar{Y}_{y0} = 0$, т. е. направление вектора $\bar{Y}$ совпадает с направлением $\bar{p}_1$.

и не может быть «выбрана» системой каким-либо иным образом.

Процессы сгорания имеют, конечно, значительно больше «степеней свободы», чем теплоотдача от сетки, поскольку горение зависит от скорости течения, от различных периодов индукции, процесса вихреобразования и многих других взаимно независимых параметров. Однако и здесь может не наблюдаться полной независимости $\bar{Y}$ от процесса колебаний.

Чтобы показать, как в таком случае будет вести себя колебательная система, рассмотрим следующий пример. Пусть возбуждение происходит вследствие подвижности фронта пламени, которая предполагается зависящей от колебания скорости потока. Допустим, для простоты, что эта зависимость может быть выражена линейным соотношением $|\bar{Y}| = b|\bar{v}_1|$. Чтобы учесть возможное запаздывание, введем сдвиг по фазе между $\bar{Y}$ и $\bar{v}_1$, равный углу β (рис. 88). Тогда очевидно

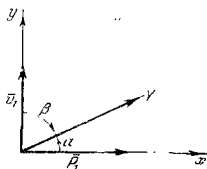


Рис. 88. Векторная диаграмма для расчетного примера.

$$\bar{Y}_x = b \sin \beta \bar{v}_1; \quad \bar{Y}_y = b \cos \beta \bar{v}_1, \quad (45.9)$$

$$\bar{A}_\Sigma = a_1 \bar{p}_1^2 + a_2 \bar{v}_1^2 + a_3 \bar{p}_1 \bar{Y}_x + a_4 \bar{v}_1 \bar{Y}_y + a_5 (\bar{Y}_x^2 + \bar{Y}_y^2), \quad (45.10)$$

где коэффициенты $a_1, a_2, \dots, a_5$ находятся из сравнения написанного равенства с равенством (45.4). Используя формулы (45.7) и (45.9), придадим соотношению (45.10) форму

$$\begin{aligned} \frac{\bar{A}_\Sigma}{c^2} = & a_1 \cos^2 \varphi + a_3 b \sin \beta \sin \varphi \cos \varphi + \\ & + (a_2 + a_4 b \cos \beta + a_5 b^2) \sin^2 \varphi. \end{aligned} \quad (45.11)$$

Если допустить, что зависимость $\bar{Y}$ от процесса акустических колебаний задана, т. е. заданы b и β , то колебательная система сохранит возможность выбора номеров гармоник, которые в рассматриваемом случае

определяются углом φ . Найдем значения φ , удовлетворяющие условию $\bar{A}_\Sigma = \bar{A}_{\max}$, для различных фиксированных значений b и β . Поскольку масштабная постоянная c не может повлиять на искомый результат, положим ее равной единице. Приравняв нулю производную $\frac{d\bar{A}_\Sigma}{d\varphi}$, найдем соотношения, определяющие φ , соответствующие экстремуму $\bar{A}_\Sigma$:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = - \frac{a_3 b \sin \beta}{a_2 - a_1 + a_4 b \cos \beta + a_5 b^2}. \quad (45.12)$$

Условие максимума $\frac{d^2 \bar{A}_\Sigma}{d\varphi^2} < 0$ даст неравенство

$$(a_2 - a_1 + a_4 b \cos \beta + a_5 b^2) \cos 2\varphi - a_3 b \sin \beta \sin 2\varphi < 0, \quad (45.13)$$

позволяющее отделить φ , соответствующие максимуму $\bar{A}_\Sigma$, от φ , соответствующих минимуму этой величины.

Воспользуемся полученными формулами для численного расчета типического случая, характеризуемого $M_1 = 0,1$; $M_2 = 0,25$. Пусть возбуждение колебательной системы происходит за счет подвижности фронта пламени, которую будем выражать через $\bar{U}_{\text{сгор}}$. Тогда зависимость φ от β , при разных b , удовлетворяющая условию $\bar{A}_\Sigma = \bar{A}_{\max}$, может быть представлена семейством кривых, изображенных на рис. 89. Указанное семейство построено для всех практически интересных значений β , изменяющихся от 0 до π . Пределы изменения величины b взяты от 0,1 до 10. Чтобы оценить вероятные численные значения коэффициента b , проведем такое рассуждение. В рассматриваемом примере $\bar{U} = \bar{U}_{\text{сгор}}$, следовательно $|\bar{U}_{\text{сгор}}| = b \bar{v}_1$. При установившемся режиме горения $U_{\text{сгор}} = v_1$, т. е. эффективная стационарная скорость распространения пламени численно равна установившемуся значению скорости течения. Если допустить, что и вариации этих величин имеют один порядок, то вероятное значение коэффициента b должно быть близким к единице. Диапазон изменения b от 0,1 до 10 перекрывает, по-видимому, с запасом, вероятные значения этого коэффициента.

На рис. 89 приведены не только упомянутые выше кривые $\varphi = \varphi(\beta; b)$, но и ограничивающие их линии $\bar{A}_\Sigma = 0$. Действительно, наличие максимума $\bar{A}_\Sigma$ еще вовсе не означает, что сама величина $\bar{A}_\Sigma$ при этом положительна, в то же время ясно, что возбуждение колебательной системы возможно только при $\bar{A}_\Sigma > 0$. Поэтому линии $\bar{A}_\Sigma = 0$, отделяющие области значений (β, φ, b) , соответствующие $\bar{A}_\Sigma > 0$,

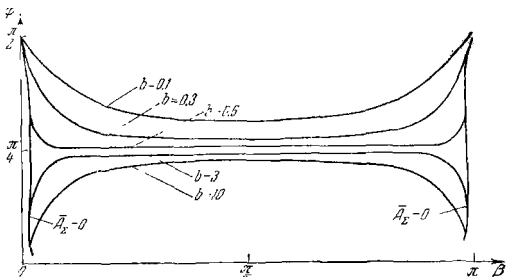


Рис. 89. Диаграмма вероятных режимов самовозбуждения, полученных из условия $\bar{A} = \bar{A}_{\max}$.

от областей, для которых $\bar{A}_\Sigma < 0$, представляют несомненный интерес. На рис. 89 нанесены лишь те участки кривых $\varphi = \varphi(\beta, b)$, соответствующих $\bar{A}_\Sigma = \bar{A}_{\max}$, для которых $\bar{A}_\Sigma > 0$.

Рассмотрение кривых, приведенных на рис. 89, позволяет сделать следующие выводы. Прежде всего видно, что, если не считать небольшого участка, соответствующего малым b , при β , несколько превышающем π , то диаграмма охватывает всю область, отвечающую условию самовозбуждения системы $\bar{A}_\Sigma > 0$. При этом легко сообразить, что полученные кривые полностью соответствуют диаграммам границ устойчивости, примеры которых приводились в гл. IV (см., например, рис. 27). Изменение β от 0 до π означает, что вектор $\bar{Y}$ находится

в первой и четвертой четвертях, т. е. именно в тех, в которых лежат основные области неустойчивости.

Главной особенностью кривых, соответствующих режимам $\bar{A}_\Sigma - \bar{A}_{\max}$ и приведенных на рис. 89, является следующее. Если исключить сравнительно узкие области, близкие к $\beta = 0$ и $\beta = \pi$ (они представляют ограниченный интерес хотя бы потому, что соответствуют малым $\bar{A}_\Sigma$, поскольку прилегают к линиям $\bar{A}_\Sigma = 0$), то для всех β и b наблюдается стремление кривых приблизиться к прямой $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Таким образом, в первом приближении можно говорить, что вне зависимости от величины запаздывания в зоне горения (β) и количественной зависимости возмущений скорости распространения пламени от возмущения скорости течения (b), колебательная система будет стремиться возбудить такую гармонику, которой соответствует $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Значению $\varphi = \frac{\pi}{4}$ соответствуют амплитуды колебаний $\bar{p}_1$ и $\bar{v}_1$, удовлетворяющие, как это видно из (45.7), условию $\bar{p}_1 = \bar{v}_1$. Это означает, что сечение Σ должно лежать приблизительно по середине между узлами давления и скорости.

Физический смысл полученного результата достаточно ясен. Выше уже было показано, что при полной независимости $\dot{Y}$ от амплитуд и фаз колебаний газа в сечении перед Σ , оптимальное значение φ , которое «выберет» колебательная система, будет $\varphi = 0$. Этому соответствует узел скорости $\bar{v}_1 = 0$, или, что то же самое, пучность давления. Если предположить, что отличие $\bar{Y}$ от нуля связано с существованием неравного нулю возмущения скорости $\bar{v}_1 \neq 0$ ($|\bar{Y}| = b\bar{v}_1$), то сразу становится ясным, что прежний результат в рассматриваемом случае становится неприменимым. Здесь будет происходить борьба двух тенденций. С одной стороны, будет действовать только что упоминавшаяся тенденция приблизить плоскость теплоподвода Σ к пучности давления, а с другой стороны, появится новая тенденция сместить Σ к пучности скорости, чтобы увели-

чить (при заданном b) амплитуду $\bar{Y}$. Как показывает расчет, это приводит плоскость Σ приблизительно на середину между указанными пучностями (или, что то же самое, узлами). С точки зрения этого рассуждения вполне закономерно и распределение кривых, соответствующих разным b , на рис. 89. Чем больше b , тем ниже идут кривые, т. е. тем ближе плоскость Σ к пучности давления ($\varphi=0$), так как с увеличением b те же значения Y можно получить при меньших по абсолютной величине возмущениях скорости v_1 .

Совершенно аналогично поддается рассмотрению и тот случай, когда амплитуда $\bar{Y}$ зависит не от v_1 , а от $\bar{p}_1$. Это может иметь место, например, при подаче топлива мало-напорными устройствами, которые изменяют количество вводимого в зону горения топлива в зависимости от противодавления окружающей среды. Не конкретизируя рассматриваемого процесса, положим, что $|\bar{Y}| = \bar{b}p_1$, а запаздывание характеризуется углом α (рис. 88). Тогда режим, соответствующий максимуму положительных значений $\bar{A}_\Sigma$, определится следующими условиями:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 2\varphi &= \frac{a_4 b \sin \alpha}{a_1 - a_2 + a_3 b \cos \alpha + a_5 b^2}, \\ (a_2 - a_1 - a_3 b \cos \alpha - a_5 b^2) \cos 2\varphi - a_4 b \sin \alpha \sin 2\varphi &< 0, \\ \bar{A}_\Sigma &> 0. \end{aligned} \right\} \quad (45.14)$$

Анализ условий (45.14), аналогичных соответствующим условиям, рассмотренным несколько выше, тоже целесообразно провести на основании численных расчетов. Для того же примера ($M_1=0,1$; $M_2=0,25$) получающиеся соотношения настолько просты, что не представляется необходимым построение графиков, подобных тем, которые приведены на рис. 89. Вне зависимости от того, полагается ли $\bar{Y} = \bar{U}_{\text{гор}}$ или $\bar{Y} = Q^*$ и практически, вне зависимости от α , числитель первого из соотношений (45.14) оказывается по абсолютной величине много меньше знаменателя, а с учетом второго соотношения (45.14) угол φ оказывается близким к нулю. Это указывает на то, что колебательная система стремится в таких случаях

возбудить гармоник, при которых плоскость теплоподвода будет находиться в пучности давления.

Таким образом, если существенный параметр $\bar{Y}$, характеризующий горение, возмущается колебаниями скорости, то плоскость Σ как бы стремится оказаться между пучностями скорости и давления, если же он возмущается давлением, то плоскость Σ как бы стремится оказаться в пучности давления. Эти общие результаты довольно хорошо прослеживаются при сопоставлении экспериментально полученных эюр стоячих волн давления с положением области теплоподвода относительно этих эюр.

§ 46. Экспериментальная проверка гипотезы о максимуме акустической энергии

Хотя полученные в предыдущем параграфе следствия из гипотезы о максимуме акустической энергии, излучаемой областью теплоподвода, и могут быть подтверждены рядом качественных наблюдений, желательно более четкое подтверждение этого предположения.

С целью подобного рода экспериментальной проверки можно, например, задержав процесс вибрационного горения на второй стадии (поскольку колебания с ограниченными амплитудами легче подвергнуть экспериментальному исследованию), зарегистрировать амплитуды и фазы колебаний и сравнить их с теми, которые предсказываются высказанной гипотезой.

Если провести эксперимент по предложенной здесь схеме, то даже положительный результат не даст, конечно, полного подтверждения высказанной выше гипотезы. Это следует уже из того, что, как указывалось в § 45, гипотеза о максимуме акустической энергии указывает на отбор механизмов возбуждения по признаку $\bar{A}_{\Sigma} - \bar{A}_{\max}$ в процессе разгона колебаний. В то же время эксперимент, поставленный по предложенной схеме, даст все соотношения для процесса установившихся колебаний. Поэтому оказывается необходимым принять дополнительное предположение, что и в установившихся колебаниях, когда поток акустической энергии определяется потерями, сохраняет свое доминирующее значение механизм, отвечаю-

щий условию $\bar{A}_\Sigma = \bar{A}_{\max}$. При установившихся колебаниях это будет означать стремление колебательной системы реализовать в конкретных условиях опыта процесс, дающий максимальные амплитуды колебаний.

Почти очевидно, что, измерив в эксперименте амплитуды колебаний скорости, давления и, если это необходимо, других параметров, невозможно утверждать, что они являются наибольшими из всех возможных в конкретных условиях опыта. Поэтому проверку гипотезы можно, по-видимому, провести в несколько менее общей постановке.

Наблюдая возникшее вибрационное горение с вполне определенным механизмом обратной связи и произведя необходимые измерения, можно затем путем теоретического расчета установить, были ли наблюдавшиеся колебания такими, что амплитудно-фазовые соотношения удовлетворяли условию $\bar{A}_\Sigma = A_{\max}$. Таким образом, при этой постановке задачи можно установить лишь то, насколько амплитудно-фазовые соотношения возникшего типа вибрационного горения соответствуют гипотезе о максимуме $\bar{A}_\Sigma$, но нельзя установить, «выбран» ли колебательной системой сам тип вибрационного горения (тип механизма обратной связи) в соответствии с указанной гипотезой.

Следовательно, высказанную выше гипотезу о максимуме A_Σ применительно к предложенному эксперименту надо заменить ее следствием: в опыте реализуется такая величина и фаза возмущения существенного параметра зоны теплоподвода $\bar{Y}$, которая при зарегистрированных в опыте возмущениях $\bar{\mu}_1$ и $\bar{v}_1$ даст наибольшую величину $\bar{A}_\Sigma$.

Чтобы проверить это теоретическое предположение, были поставлены специальные опыты. Опытная установка представляла собою трубу общей длиной 8 м с диаметром 100 мм. В эту трубу подавался заранее подогретый воздух, в котором было предварительно испарено необходимое количество бензина. Горение происходило при относительно малых длинах камеры сгорания, ее протяженность имела порядок 800—900 мм. Пламя удерживалось

стабилизатором, имевшим форму уголкового элемента, поставленного вершиной навстречу потоку.

Как видно из этого краткого описания, в установке такого рода не могли проявиться механизмы обратной связи, обязанные своим существованием смесеобразованию. Надо было ожидать, что главным будет механизм обратной связи, обусловленный периодическим вихреобразованием за стабилизатором, а следовательно, существенным параметром зоны теплоподвода, возмущения которого акустическими колебаниями замыкают обратную связь, будет эффективная скорость распространения пламени $\bar{U}_1$.

Чтобы убедиться в этом, стенки камеры сгорания были выполнены из кварцевого стекла, и скоростная киносъемка процесса вибрационного горения дала типичные картины периодического мощного вихреобразования за стабилизатором. Подкрашенное пламя, которое регистрировалось киносъемкой, позволяло записывать интегральную светимость ближайшей окрестности стабилизатора на шлейфовый осциллограф, на который одновременно записывались и колебания давления. Полученные осциллограммы показали, что колебания светимости имели частоту, совпадающую с частотой колебаний давления. Скоростная киносъемка убедила в том, что упомянутые колебания светимости связаны с изменением объема, занятого горящими (светящимися) газами, которое, как известно из гл. IV, может быть сведено к изменению эффективной скорости распространения пламени $\bar{U}_1$.

Для вычисления $\bar{A}_2$ по данным опыта следовало прежде всего найти фазу и амплитуду $\Gamma = \bar{U}_1$ и других величин, необходимых для расчета величины потока акустической энергии.

Как видно из уравнений (45.1) условия, связывающие колебания слева и справа от зоны теплоподвода, содержат шесть коэффициентов и пять переменных. Все шесть коэффициентов находятся, в конечном итоге, если задать M_1 и M_2 . Первая из этих величин легко измеряется непосредственно, а вторая столь же легко определяется, как только произведено измерение температуры газов за зоной теплоподвода. Таким образом, нахождение коэффициен-

гов $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{23}$ по данным опыта труда не представляет. Измерение колебаний давления непосредственно перед зоной горения и сразу за ней (p_1 и p_2) также не представляет технических трудностей. Из остальных трех величин — $\bar{v}_1$, v_2 и $\bar{Y} = \bar{U}_1$ — лишь первая поддается измерению при помощи термоанемометра. Но коль скоро измерены p_1 , p_2 и $\bar{v}_1$, две другие величины, $\bar{v}_2$ и $\bar{U}_1$, могут быть вычислены, поскольку в системе двух равенств (45.1) останутся лишь два неизвестных. Вычисление A_Σ проще всего произвести затем по формуле (19.7)

$$\bar{A}_\Sigma = \frac{1}{2} (n\pi \bar{p}_2 \bar{v}_2 - \bar{p}_1 \bar{v}_1).$$

Таким образом, замер соответствующих величин даст возможность найти поток энергии $\bar{A}_\Sigma$, наблюдавшийся в опыте. Чтобы решить вопрос о том, подчиняется ли этот поток энергии $\bar{A}_\Sigma$ условию $\bar{A}_\Sigma = \bar{A}_{\max}$, можно произвести следующие дополнительные расчеты. Поскольку в процессе определения экспериментального значения $\bar{A}_\Sigma$ найдена и экспериментальная величина $\bar{U}_1$, можно проанализировать, как стало бы изменяться $\bar{A}_\Sigma$, если бы $\bar{U}_1$ характеризовалось другими амплитудами и фазами при тех же самых p_1 и $\bar{v}_1$. При этом вариации $\bar{U}_1$ следует произвести в окрестности значения $\bar{U}_1$, найденного из обработки опытных данных.

Результаты соответствующих расчетов приведены на рис. 90 и 91. На этих графиках дано изменение $\bar{A}_\Sigma$ для разных, наблюдавшихся в опыте, частот, в зависимости от величины H или β (амплитуды и фазы возмущения скорости распространения пламени относительно стенок трубы $\bar{N}$). Величина $\bar{N} = \bar{v}_1 + \bar{U}_1$ однозначно определяет (при заданном значении $\bar{v}_1$) возмущение скорости распространения пламени $\bar{U}_1$. Приведенная выше связь между $\bar{N}$ и $\bar{U}_1$ показывает, что для целей, поставленных в настоящем параграфе, переход от $\bar{U}_1$ к $\bar{N}$ ничего не меняет: надо будет убедиться в том, соответствует ли экспериментально зарегистрированному режиму равенство $\bar{A}_\Sigma = \bar{A}_{\max}$, т. е. лежат ли $\bar{A}_\Sigma$ для $\bar{N}$, отличных от тех, которые

вычислены по опытным данным, ниже A_{Σ} , зарегистрированного в опыте.

На рис. 90 и 91 приведены кривые изменения A_{Σ} в функции $H = |\bar{N}|$ и фазы $\bar{N}$, обозначенной β ; на этих

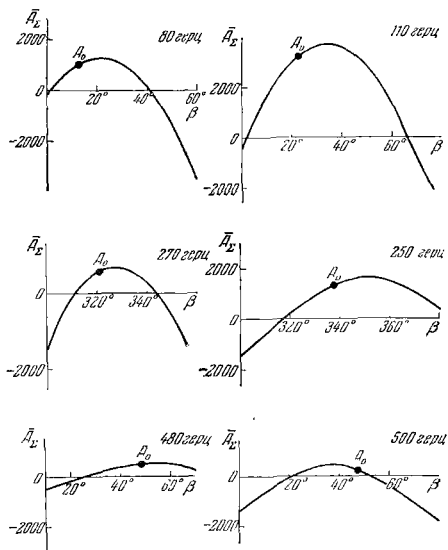


Рис. 90. Подожжение экспериментальных точек (A_0) на кривых $\bar{A}_{\Sigma} = \bar{A}_{\Sigma}(\beta)$.

кривых нанесены точки A_0 , которые соответствуют опыту. Оценка точности эксперимента показала, что фазы регистрировались осциллографом с точностью $\pm 15^\circ$, а точность вычисления H , определяемая точностями замера

$\bar{p}_1$, $\bar{v}_1$ и $\bar{p}_2$, имеет порядок ± 3 условных единицы, отложенных по осям абсцисс на рис. 91.

Если учесть точность определения β и H в опытах, то можно говорить о том, что для всех наблюдавшихся частот,

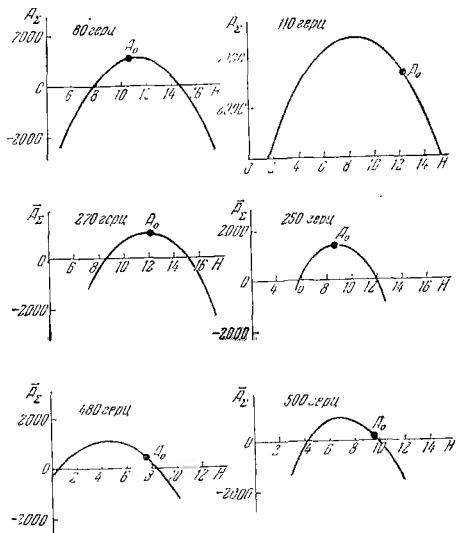


Рис. 91. Положение экспериментальных точек (A_0) на кривых $\bar{A}_z = \bar{A}_z(H)$.

фактически реализованных колебательной системой, режимы вибрационного горения лежат в окрестности максимумов кривых $\bar{A}_z = \bar{A}_z(\beta)$ и $\bar{A}_z = \bar{A}_z(H)$, что следует рассматривать как подтверждение одного из следствий

из гипотезы о стремлении колебательной системы реализовать режим, соответствующий максимуму акустической энергии, излучаемой областью теплоподвода.

Чтобы оценить степень достоверности изображенных на рис. 90 и 91 диаграмм, приведем некоторые дополнительные данные. Кривые на этих диаграммах строились следующим образом. По замерам в опыте $\bar{p}_1$, $\bar{v}_1$ и $\bar{p}_2$ при помощи равенств типа (45.1) находились v_2 , $Y - \bar{N}$ и поток энергии $\bar{A}_\Sigma$. Затем производилась варпация амплитуды $\bar{N}$ (обозначенной II) и фазы $\bar{N}$ (обозначенной β) при неизменных $\bar{p}_1$, $\bar{v}_1$, и для этих измененных $\bar{N}$ вновь отыскивался поток энергии $\bar{A}_\Sigma$, который, как уже говорилось, оказывался меньшим, чем для фактически реализованного режима. Следовательно, существенный параметр, характеризующий зону горения $\bar{Y}$, оказывался всякий раз реализованным таким образом, что все другие значения $\bar{Y}$ (при тех же $\bar{p}_1$, $\bar{v}_1$) давали меньшее значение $\bar{A}_\Sigma$. Совершенно ясно, что на результаты этих вычислений могли повлиять как точность измерений $\bar{p}_1$, $\bar{v}_1$ и $\bar{p}_2$, так и точность определения коэффициентов a_{11} , a_{12} , ..., a_{23} в равенствах (45.1). Что касается первого источника ошибки, то с наименьшей точностью производилось измерение $\bar{v}_1$; измерения $\bar{p}_1$ и $\bar{p}_2$ производились практически совершенно точно. Коэффициенты равенств (45.1) можно было определить по формулам гл. IV, зная M_1 и M_2 и предполагая, что в зоне горения происходят колебания плоского фронта пламени, за которым температура мгновенно достигает расчетного значения. Можно было, с другой стороны, уточнить как конфигурацию пламени в зоне горения (по данным киносъемки), так и учесть постепенность нарастания температуры в факеле. Этот подход давал, конечно, несколько иные численные значения a_{11} , a_{12} , ..., a_{23} , чем более простой, упомянутый выше.

Численный анализ показал, что хотя ошибка в измерении $\bar{v}_1$ и возможные отличия в коэффициентах равенств (45.1) в сильной степени влияют на вычисленную величину $\bar{A}_\Sigma$, это не может изменить сделанных выводов. Хотя численные значения $\bar{A}_\Sigma$ и изменялись, кривые $\bar{A}_\Sigma = \bar{A}_\Sigma(II)$

и $\bar{A}_\Sigma = \bar{A}_\Sigma(\beta)$ сохраняли свой вид и, главное, точки A_0 практически не смещались на этих кривых относительно их максимумов. Следовательно, вывод о стремлении колебательной системы реализовать режим $\bar{A}_\Sigma = \bar{A}_{\max}$ не изменился бы при более тщательных измерениях и более точной обработке опытных данных.

Относительно описанных расчетов следует сделать еще одно замечание. Как видно из методики построения кривых на рис. 90 и 91, при варьировании $\bar{Y}$: $\bar{N}$ не налагалось требование выполнения красного условия на выходном конце трубы. Приведенные расчеты надо рассматривать как выявление тенденции, а не как точные вычисления.

Рассмотренные здесь опыты следует расценивать в качестве экспериментальной иллюстрации гипотезы о максимуме $\bar{A}_\Sigma$, их объем явно недостаточен для того, чтобы можно было с полной уверенностью говорить о подтверждении гипотезы. Поэтому всякие новые экспериментальные исследования в этом направлении представляют несомненный интерес.

Надо сказать, что ряд явлений, которые наблюдаются при вибрационном горении, могут, вероятно, трактоваться с точки зрения стремления колебательной системы к реализации режимов, характеризуемых $\bar{A}_\Sigma = \bar{A}_{\max}$.

В частности, описывавшиеся в предыдущих главах скачкообразные изменения частот колебаний по мере перемещения зоны горения по длине трубы можно объяснить и с точки зрения выдвинутой гипотезы. Опытные данные не опровергают предположения, что переход с одной частоты колебаний на другую связан с тем, что на новой частоте количество генерируемой в зоне теплоподвода акустической энергии превосходит ее количество, генерировавшееся на старой частоте колебаний.

§ 47. Возбуждение и подавление вибрационного горения

Выше уже говорилось о том, что в зависимости от конкретных обстоятельств вибрационное горение (возбуждение акустических колебаний теплоподводом вообще) может быть процессом, который желательно организовать,

либо нежелательным явлением, с которым следует бороться. Поэтому практический интерес могут иметь обе постановки задачи — как сознательное возбуждение вибрационного горения, так и решительная борьба с этим явлением.

Подробное рассмотрение вибрационного горения с этих противоположных точек зрения вряд ли имеет большой смысл, так как решение одной из двух названных задач в какой-то мере решает и противоположную: все мероприятия, которые полезны для подавления колебаний, будут вредны для их возбуждения, и наоборот.

Что касается мероприятий, которые способствуют возбуждению колебаний, то, исходя из результатов, приведенных в предыдущих главах, можно дать такие общие рекомендации.

Труба, в которой предполагается возбуждение колебаний, не должна допускать больших потерь акустической энергии. В частности, если эта труба открытая с одного или двух концов, ее следует делать достаточно «длинной», т. е. брать достаточно большое отношение длины к диаметру трубы. Это отношение желательно иметь порядка

$\frac{L}{d} = 30+50$, хотя вибрационное горение может наблюдаться и в более «коротких» трубах. Кроме отношения L/d , очень большое значение имеет конструктивное оформление самой трубы. Следует всячески избегать каких-либо щелей (например, на стыках составляющих трубу элементов), сверлений в теле трубы и т. п. Если находящийся в трубе газ будет иметь возможность взаимодействовать с окружающей средой не только через концевые сечения, но и через разного рода сверления и иные неплотности в теле трубы, то это приведет к сильному демпфированию колебаний.

В зависимости от того, каков характер предполагаемого процесса теплоподвода (будет ли сжигаться газ, угольная пыль или иное горючее; допустима ли установка плохо обтекаемых тел в потоке и т. п.), можно создать условия наибольшего благоприятствования какому-либо из перечисленных в гл. VII механизмов обратной связи. Если, например, предполагается получить вибрационное горение в потоке заранее подготовленной газовой горю-

чей смеси в трубе, открытой с двух концов, то наиболее естественно вызвать вибрационное горение путем создания условий для развития механизма горения, связанного с периодическим вихреобразованием. Как известно, это может быть достигнуто организацией процесса горения за плохо обтекаемым телом (стабилизатором). Следует лишь учесть, что место установки стабилизатора по длине трубы надо выбрать оптимальным образом. Это означает, что надо найти такое положение стабилизатора по длине трубы, при котором в зоне горения гегерировалось бы наибольшее количество акустической энергии при одновременном удовлетворении обоих краевых условий. Лучше всего искать это положение опытным путем. Можно сделать для этой цели подвижную конструкцию стабилизатора (например, перемещать его при помощи штанги, выходящей из «холодного» конца трубы, но не делать при этом никаких продольных вырезов в теле трубы, которые сообщались бы с внешней средой). Имея подвижный стабилизатор, следует перемещать его, не прерывая процесса горения, и искать такое положение его по длине трубы, при котором развивались бы колебания наиболее желательной амплитуды и частоты. Если такая конструкция окажется невозможной, то перемещать стабилизатор можно в перерывах между запусками установки. После выбора положения стабилизатора по длине трубы следует окончательно закрепить его в избранном сечении трубы.

В тех случаях, когда механизм вибрационного горения найден, весь процесс поисков оптимальных условий возбуждения надо перестроить соответствующим образом, руководствуясь описанием механизмов обратной связи, приведенным в гл. VII.

Более сложной является задача подавления вибрационного горения, если оно возникло. В некоторых случаях оказывается достаточным разорвать обратную связь в колебательной системе. Этот разрыв можно провести в том случае, если известен механизм обратной связи, который позволил возникнуть вибрационному горению. Выше, в гл. VII, при описании возможных механизмов обратной связи уже приводились примеры такого рода. В частности, при возникновении вибрационного горения вследствие взаимодействия акустических колебаний

с процессом вихреобразования перед зоной горения для подавления вибрационного горения достаточно установить спрямляющие решетки между местом, в котором образовывались вихри, и зоной горения (см. § 36). В других случаях следует использовать какие-либо иные методы, которые позволили бы разорвать соответствующие конкретные виды обратных связей.

Намеченный здесь метод борьбы с вибрационным горением связан с преодолением очень больших трудностей. Дело в том, что число возможных механизмов обратной связи весьма велико, причем они могут иметь совершенно различную физическую природу (см. гл. VII). Поэтому желание разорвать опасную обратную связь может на практике означать требование разрыва всех возможных обратных связей. Если учесть, что предугадать наиболее опасные в данных конкретных условиях обратные связи не всегда возможно, то остается лишь выдвигать самые общие требования: добиваться постоянства расхода горючего, следить за плавностью всех обводов трубы на входном участке и т. п. Однако даже выполнение всех этих требований оставляет возможность проявиться процессам, связанным с воздействием переменных ускорений на фронт пламени и т. д.

Кроме сказанного, следует также попытаться, что в соответствии с гипотезой о стремлении системы реализовать процесс с максимальным излучением акустической энергии из области теплоподвода, разрыв одной или нескольких обратных связей, которые были главными, не всегда приводит к подавлению вибрационного горения. Какой-то иной механизм обратной связи, который до этого был совершенно несуществующим, может стать главным. При этом колебательная система должным образом «подправит» частоту и фазу колебаний так, чтобы новый механизм давал максимально возможное для него количество акустической энергии. Этим, вероятно, и объясняется трудность борьбы с вибрационным горением такого рода мероприятиями. Эффективное подавление вибрационного горения возможно в случае применения универсальных методов, одинаково воздействующих на все, или хотя бы большинство механизмов обратной связи, или на колебательную систему в целом.

Наиболее естественным универсальным методом борьбы с вибрационным горением является увеличение потерь акустической энергии. Конструктивно это может быть выполнено в виде каких-то поглощающих акустические импульсы устройств в концевых сечениях. Такое мероприятие не всегда осуществимо, поскольку оно может быть сопряжено с гидравлическими потерями или парушать другие требования, предъявляемые к конструкции. Если нежелательно включать поглощающие устройства в конструкцию концевых сечений трубы, то можно предложить, например, такую радикальную меру, как введение продольного пропгла в теле трубы (или частых сверлений по одной из образующих), позволяющего сообщаться газам, находящимся в теле трубы с внешним пространством помимо концевых сечений. Правда, осуществление этого ставится почти невозможным, если давление внутри трубы заметно превышает давление в окружающем пространстве.

Быть может, в некоторых случаях будет полезным снабжать внутренние стенки трубы акустическими демпферами паподобие тех, которые используются при улучшении акустики помещений. Следует, правда, заметить, что если о демпфирующем влиянии поглотителей акустической энергии в концевых сечениях и сверлений в теле труб имеются прямые опытные данные, то опыты с использованием акустически демпфирующих стенок трубы пока неизвестны.

Перечисленные выше методы непосредственного демпфирования колебаний в общем достаточно эффективны и универсальны (не зависят от конкретного вида механизма обратной связи). Их недостатком следует признать то, что они налагают тяжелые и часто невыполнимые требования на конструкцию трубы и связанных с нею устройств, так как сопряжены с введением дополнительных гидравлических сопротивлений, разгерметизацией трубы между ее концами, ухудшением условий охлаждения трубы и т. д. Поэтому желательно создание по возможности универсальных методов подавления вибрационного горения путем непосредственного воздействия на зону горения, без изменения конструкции трубы и связанных с ее концами устройств.

Средством такого рода, которое, вероятно, во многих случаях может оказаться полезным, является растянутая по длине трубы организация горения. До сих пор рассматривались лишь те случаи, когда протяженность зоны теплоподвода σ была мала. Правда, в гл. IV был дан общий метод сведения процесса нестационарного горения в некоторой протяженной зоне теплоподвода σ к процессу теплоподвода на эффективной плоскости сильного разрыва Σ , но этот метод не был использован с точки зрения отыскания свойств процесса горения, при которых самовозбуждение колебательной системы становится невозможным.

Исходя из гипотезы о стремлении колебательной системы реализовать тот процесс, который даст максимум потока акустической энергии A_{Σ} , излучаемой областью теплоподвода, можно сделать следующее важное заключение. Возбуждение колебаний связано с должным соотношением между амплитудами и фазами возмущенного теплоподвода $\bar{Q}^*$ и возмущения скорости распространения пламени $\bar{U}_1$, с одной стороны, и акустических колебаний, — с другой стороны. Поэтому в принципе борьба с вибрационным горением может осуществляться как путем нарушения фазовых соотношений, так и путем изменения соотношений между амплитудами Q^* и $\bar{U}_1$ и амплитудами акустических колебаний. Однако первый из названных путей фактически почти никогда не может привести к цели. Действительно, пусть в возбужденной автоколебательной системе рассматриваемого типа существует некоторое фазовое соотношение, которое удастся изменить в нужном направлении. Тогда возбужденные колебания затухнут, но при этом почти наверняка возбудятся другие, характеризуемые другой частотой, при которой это изменение параметра не сможет помешать возбуждению колебаний. Кроме того, процесс горения в реальных топках имеет такое большое количество «степеней свободы», что принудительное изменение фазы какого-либо одного из звеньев сложной цепочки причин и следствий оставляет достаточно много возможностей для самопроизвольного изменения фаз в других звеньях в соответствии с гипотезой о стремлении системы осуществлять режим $\bar{A}_{\Sigma} - \bar{A}_{\max}$.

Сказанное можно проиллюстрировать таким простым примером. При возбуждении вибрационного горения в неподвижном газе, заключенном в трубе с одним закрытым концом, основным механизмом обратной связи являются механизм, связанный с воздействием периодически изменяющихся ускорений на фронт пламени. Совершенно очевидно, что по мере медленного перемещения фронта пламени по горючей смеси он последовательно переходит из области, в которой фазы ускорения были в должном соответствии с фазами колебаний давления, в область, где это соответствие нарушается (это связано с тем, что по разные стороны пучности давления колебательные составляющие скорости направлены в разные стороны). Если бы предположение о решающей роли фазовых соотношений было правильным, то колебания должны были бы прекратиться. В действительности же возбуждаются колебания другой частоты¹⁾.

Следовательно, уже из общих соображений становится ясным, что борьба с вибрационным горением путем нарушения должного соотношения между фазами $\dot{Q}^*$ и $\bar{U}_1$ и фазами акустических колебаний малоперспективна.

Вторым возможным путем, как указывалось выше, является нарушение необходимых амплитудных соотношений. Здесь можно воспользоваться следующими результатами, полученными в предыдущих главах. Если возбуждение системы связано только с $\bar{Q}^*$, то при $\bar{Q}^* = 0$ колебательная система устойчива; если возбуждение связано только с $\bar{U}_1$, то при $\bar{U}_1 = 0$ колебательная система устойчива или нейтральна. Поскольку оба эти результата были получены при пренебрежении потерями энергии в окружающую среду, то для реальных систем будет справедливо такое утверждение: при $\bar{Q}^* = 0$ и $\bar{U}_1 = 0$ колебательная система всегда устойчива. Таким образом, главным в подавлении вибрационного горения является всемерное уменьшение амплитуд $\bar{Q}^*$ и $\bar{U}_1$. Одним из средств, ведущих к этой цели, является растянутая организация горения. Покажем это на двух примерах, имеющих качественный характер.

¹⁾ См. экспериментальные графики рис. 50. Более подробное изложение этого явления будет дано в следующей главе.

Пусть происходит сгорание смеси, которая готовится непосредственно перед зоной горения. Предположим, что основным механизмом обратной связи является механизм, связанный с образованием смеси неоднородного состава вследствие колебаний расхода воздуха через сечение, в котором расположены форсунки, впрыскивающие горючее в текущую воздушную среду. Этот механизм подробно описывался в § 35. Формула (35.4) показывает, что при движении горючей смеси по трубе коэффициент избытка

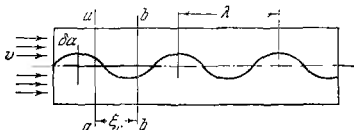


Рис. 92. Схема для расчета процесса сгорания, идущего в двух сечениях, сдвинутых на расстояние ξ_c .

воздуха α не остается постоянным. На него накладывается периодическое возмущение $\delta\alpha$. Это возмущение переносится потоком как и всякая неоднородность, свойственная движущейся по трубе среде и неподвижная относительно частиц газа. Поэтому в один и тот же момент времени в разных сечениях трубы α будут разными. На рис. 92 схематически изображено течение по участку трубы. Волнообразной линией, колеблющейся около оси трубы, условно показано возмущение коэффициента избытка воздуха $\delta\alpha$. В сечении aa происходит сгорание определенной части смеси, а в сечении bb — сгорание оставшейся части смеси. Между этими сечениями на участке ab горения смеси не происходит. Расстояние между сечениями aa и bb равно ξ_c . Длина волны возмущения $\delta\alpha$ обозначена λ . Пусть сечение $\xi = 0$ совпадает с сечением aa . Тогда колебания $\delta\alpha$ в этом сечении будут происходить по закону

$$\delta\alpha = \delta\alpha_0 e^{i\omega\tau}, \quad (47.1)$$

где $\delta\alpha_0$ — величина $\delta\alpha$, определенная по формуле (35.4) для момента времени $\tau = 0$.

Колебание $\delta\alpha$ в сечении bb можно найти исходя из того, что оно наблюдалось в сечении aa в некоторый предшествующий момент времени, отстоящий от настоящего на величину, потребную для перемещения моля смеси на расстояние $ab = \xi_c$. Это время $\tau_c = \frac{\xi_c}{M_c}$, где M_c — среднее значение скорости течения между участками aa и bb , отнесенное к скорости звука в холодном течении. Следовательно, в сечении bb колебание $\delta\alpha$ будет определяться следующей формулой:

$$\delta\alpha = \delta\alpha_0 e^{i\omega\left(\tau - \frac{\xi_c}{M_c}\right)}. \quad (47.2)$$

Пусть в каждом из рассматриваемых сечений сгорает часть смеси: в сечении aa доля ξ (где $0 < \xi < 1$), а в сечении bb доля $(1 - \xi)$. Если взять границы области теплоподвода σ так, чтобы оба эти сечения лежали внутри σ , то суммарное тепловыделение в области σ будет равно

$$\delta Q = \frac{\partial Q}{\partial \alpha} \delta\alpha_0 \left[\xi - (1 - \xi) e^{-i\omega \frac{\xi_c}{M_c}} \right] e^{i\omega\tau}. \quad (47.3)$$

Поставим задачу об отыскании для заданной частоты ω таких ξ_c и ξ , при которых $\delta Q = 0$. Написав равенство (47.3) в тригонометрической форме и приравняв вещественную и мнимую части порознь нулю, получим:

$$\left. \begin{aligned} \sin \omega \frac{\xi_c}{M_c} &= 0, \\ \xi + (1 - \xi) \cos \omega \frac{\xi_c}{M_c} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда сразу находим:

$$\left. \begin{aligned} \omega \frac{\xi_c}{M_c} &= k\pi \quad (k = 1; 3; 5; \dots), \\ \xi &= 0,5. \end{aligned} \right\} \quad (47.4)$$

Значения k в первом из написанных равенств взяты нечетными, так как для четных значений k получается $\xi = \infty$, а то время как по условию $0 < \xi < 1$.

Длина волны возмущения $\delta\alpha$, как и длина волны возмущения энтропии, равна (в безразмерных переменных) $\lambda = 2\pi \frac{M_c}{\omega}$ и, следовательно, из первого равенства (47.4) получим:

$$\xi_c = k \frac{\lambda}{2}. \quad (47.5)$$

Наименьшее расстояние ξ_c будет получено при $k = 1$.

Таким образом, если пожелать свести амплитуду возмущения тепловыделения к нулю, надо разбить процесс горения так, чтобы он происходил в двух плоскостях, отстоящих друг от друга на половину длины волны возмущения энтропии, и, кроме того, потребовать, чтобы в указанных сечениях сгорали равные доли топлива. Полученный результат вполне естествен, именно таким должен быть процесс горения, чтобы в каждый момент времени избыток тепла (против среднего значения), выделяющийся в том сечении, где находится богатая смесь, компенсировался недостатком тепловыделения в сечении, которое пересекает бедная смесь.

Надо сказать, что проделанный выше расчет не может претендовать на большее, чем быть грубой качественной схемой. Однако он позволяет указать на принципиально новое, что содержится в свойствах растянутого по длине камеры горения. Действительно, пусть горение происходит только в одной плоскости (а не в двух). Тогда, смещая эту плоскость вдоль оси трубы, можно изменять соотношения между фазой возмущения теплоподвода и фазой колебаний среды. При этом могут быть найдены такие положения плоскости теплоподвода, при которых самовозбуждение системы становится неизбежным. Другое дело, если горение происходит в двух плоскостях, отвечающих условиям (47.4). Тогда возбуждение становится невозможным при любом положении области теплоподвода по оси трубы, так как фазовые соотношения перестают играть какую-либо роль, поскольку амплитуда возмущения теплоподвода обратилась в нуль. Это указывает на большую универсальность второго метода подавления вибрационного горения (путем уменьшения относительных амплитуд, а не путем изменения фазовых соотноше-

ний). Сведение амплитуды возмущения тепловыделения до нуля равносильно разрыву обратной связи. В этом случае акустические колебания не смогут вызвать колебаний тепловыделения, которые способны поддерживать их.

Конечно, точное выполнение условий (47.4) практически затруднительно. Однако даже грубо приближенная реализация их способна дать заметный эффект. В этом можно убедиться, если посмотреть, к чему приведет изменение длины волны возмущения энтропии λ при постоянном значении ξ_c . Вариация λ приведет к нарушению первого равенства (47.4), записанного в виде соотношения (47.5). Найдем абсолютную величину возмущения теплоподвода δQ , воспользовавшись равенством (47.3),

$$|\delta Q| = \text{mod } \frac{\partial Q}{\partial \alpha} \delta \alpha_0 \sqrt{\xi^2 + 2\xi(1 - \xi) \cos 2\pi \frac{\xi_c}{\lambda} + (1 - \xi)^2}. \quad (47.6)$$

Пусть модуль $\frac{\partial Q}{\partial \alpha} \delta \alpha_0$ условно примем равным единице. Тогда относительная амплитуда возмущения $|\delta Q|$ будет зависеть от двух параметров: ξ и $\frac{\xi_c}{\lambda}$. Характер этой зависимости для ξ , равных 0,25; 0,5 и 0,75, а также для всего диапазона изменений $\frac{\xi_c}{\lambda}$ ($0 < \frac{\xi_c}{\lambda} < 1$) приведен на рис. 93. Как видно из графиков, по сравнению с горением в одной плоскости ($\xi_c = 0$) амплитуда колебаний возмущения теплоподвода $|\delta Q|$ в среднем снижается вдвое, а вблизи оптимального значения $\frac{\xi_c}{\lambda} = 0,5$ составляет 10–20% от величины, характерной для сосредоточенного сгорания. График, построенный для $\xi = 0,25$ и $\xi = 0,75$, показывает, что даже такие значительные отклонения от оптимальной величины $\xi = 0,5$ продолжают сохранять за рассредоточенным сгоранием заметные преимущества. Таким образом, разнесение горения на два очага может оказаться полезным при попытке подавить вибрационное сгорание.

Все приведенные выше соображения остаются справедливыми и для ряда других механизмов обратной связи, для которых существен перенос каких-либо неоднородностей потоком. В частности, сказанное сохраняет силу

для механизма обратной связи, обусловленного периодическим возмущением подачи горючего (выше уже говорилось, что этот тип обратной связи характерен для мало-напорных систем подачи горючего, например, подачи пыли в пылеугольных топках). Буквально то же самое можно сказать о механизмах, связанных с колебанием характера распыла горючего форсунками, вследствие колебаний скоростного напора в области расположения этих форсунок и т. п.

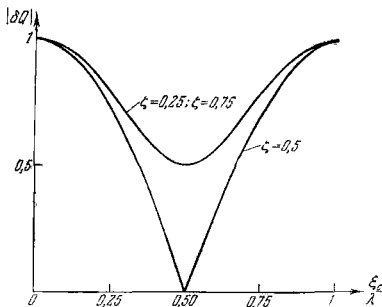


Рис. 93. Изменение амплитуды возмущения теплового потока в зависимости от относительного расстояния между сечениями, в которых происходит сгорание, и от доли горючей смеси, сгорающей в первом сечении.

Не следует думать, что разнесение горения на два очага полезно только в том случае, если механизмы обратной связи входят в ту группу, которая в гл. VII была охарактеризована как связанная со смесеобразованием. Можно предполагать, что и такие явления, как набегающие на зону горения вихри, будут в меньшей степени возмущать процесс горения, поскольку они не будут одновременно воздействовать на всю зону горения, имеющую в рассматриваемом случае большую глубину.

Проведенное выше рассмотрение имело, как уже указывалось, скорее качественный, чем количественный

характер. По существу, разнесение горения на два очага было просто грубой моделью процесса горения, растянутого в направлении оси течения.

На основе приведенных соображений можно утверждать, что разнесение горения положительно сказывается на уменьшении амплитуды возмущения теплоподвода. Однако известно (это видно хотя бы из системы (16.15),

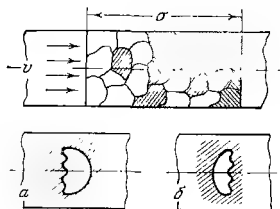


Рис. 94. Схема сгорания однородной смеси (моли продуктов сгорания заштрихованы).

описывающей процесс в зоне теплоподвода), что самовозбуждение акустических колебаний может происходить как при отличном от нуля возмущении теплоподвода, так и при отличном от нуля возмущении эффективной скорости распространения пламени. Влияние разнесения горения на последнюю величину следует рассмотреть особо.

Если говорить о сгорании, растянутом на известную глубину, то нельзя ограничиться представлением о тонком фронте пламени, разделяющем трубу на две области: область холодной смеси и область продуктов сгорания, в которой процесс горения закончился. Фактически при растянутом сгорании в зоне химических реакций будут находиться достаточно большие моли холодной смеси, соприкасающиеся с молями продуктов сгорания; на границах между ними будет происходить процесс горения. Схематически это изображено в верхней части рис. 94 (моли продуктов сгорания заштрихованы). В конце гл. VII

приводилось описание весьма действенного механизма обратной связи, обусловленного влиянием переменных ускорений (связанных с акустическими колебаниями) на топкий фронт пламени, рассматриваемый как поверхность раздела двух сред разной плотности. Там же было показано, что это сводится, в конечном счете, к возмущению эффективной скорости распространения пламени вследствие волнообразования на поверхности фронта.

В случае растянутого сгорания, если зона горения имеет структуру, показанную в верхней части рис. 94, упомянутый здесь механизм возмущения эффективной скорости распространения пламени, вследствие волнообразования на поверхностях раздела, будет в значительной степени ослаблен. В этом можно убедиться из рассмотрения двух схем, приведенных в нижней части рис. 94. В левой и правой частях рисунка дано поведение одного и того же моля горючей смеси, окруженного продуктами сгорания. Граница моля является фронтом пламени. Моменты *a* (левый рисунок) и *б* (правый рисунок) сдвинуты во времени на $\frac{1}{2}$ периода акустических колебаний, поэтому направления действующих в эти мгновения на моль ускорений противоположны. Легко сообразить (это ясно из приводившихся в конце гл. VII общих соображений и видно из правой части рис. 75), что если в момент *a* максимальное волнообразование наблюдалось на левой границе моля, то на правой его границе будет минимум волнообразования. Это следует из того, что на одной из этих границ ускорение действует от холодного газа к горячему, а на другой — от горячего к холодному. Очевидно, далее, что через полпериода, когда направление ускорения изменится на обратное, характер волнообразования тоже изменится (момент *б*). Та граница, на которой было сильное волнообразование, станет невозмущенной, а прежде невозмущенная покроется волнами. Учтем теперь, что эффективная скорость сгорания пропорциональна суммарной поверхности пламени. Вследствие того, что левая и правая границы моля покрываются волнами попеременно, то в среднем общая площадь поверхности раздела остается постоянной для всех моментов времени. Здесь, конечно, не учитывается неизбежное уменьшение этой поверхности вследствие сгора-

ния свежей смеси; учет такого явления несуществен, так как оно не имеет периодического характера. Поскольку суммарная площадь границ моля перестает изменяться периодически, постольку и эффективная скорость распространения пламени не будет иметь периодической составляющей, а это и говорит о том, что возмущение эффективной скорости распространения пламени равно нулю. Следовательно, самовозбуждение исключается. Конечно, приведенные рассуждения являются лишь грубым приближением к действительности, однако они показывают, что структура зоны горения способна существенно повлиять на возможность возбуждения акустических колебаний, причем растянутое вдоль оси трубы сгорание должно характеризоваться пониженной склонностью к самовозбуждению акустических колебаний.

Подводя итог сказанному о свойствах растянутой организации горения, можно утверждать, что такая схема процесса горения склонна заметно уменьшать амплитуды возмущений как теплоподвода, так и эффективной скорости распространения пламени, и является в некотором смысле универсальным методом борьбы с вибрационным горением.

Как будет видно из § 52, возбуждение акустических колебаний в жидкостных реактивных двигателях связано не с возмущением теплоподвода или эффективной скорости распространения пламени, а с возмущением газообразования во фронте горения. Тем не менее, общее заключение о том, что при растянутой организации горения возбуждение акустических колебаний менее вероятно, чем в том случае, когда горение сосредоточено в одном сечении, в известной мере справедливо и для жидкостных реактивных двигателей. Это было показано Крокко и Чженом¹⁾, рассмотревшими устойчивость продольных акустических колебаний в жидкостных реактивных двигателях, в предположении, что горение сосредоточено в двух отстоящих друг от друга на конечном расстоянии фронтах горения. В том случае, когда указанные два фронта

¹⁾ C r o c c o I. and C h e n g S. I., High-Frequency Combustion Instability in Rocket Motor with concentrated Combustion, Journ. of the Rocket Society 23; № 5, 1953.

располагались пучным образом (один у головки камеры сгорания, т. е. в пучности давления, а другой в узле давления), это приводило в расчетах названных авторов к уменьшению вероятности возбуждения системы. Следовательно, и в жидкостных реактивных двигателях растянутое горение (горение в двух фронтах) может оказывать демпфирующее влияние на процесс самовозбуждения продольных акустических колебаний.

Растянутая организация горения отличается от обычной тем, что вместо одной плоскости теплоподвода создаются две или больше. Происходит как бы нарушение обычной картины теплоподвода в продольном направлении (вдоль оси x). Мыслимо изменение организации горения и в поперечном направлении — вдоль осей, нормальных к оси x . Можно, например, сделать так, чтобы нагреванию подвергалась только часть газа, пересекающего область теплоподвода, а другая оставалась холодной. При этом за зоной теплоподвода образуется течение параллельных струй, часть которых нагрета, а часть имеет температуру газа перед зоной теплоподвода. Если эти струи не смешиваются в непосредственной близости от источника тепла, то такое слоистое строение потока за зоной теплоподвода тоже может способствовать появлению демпфирующих эффектов.

Подробное теоретическое рассмотрение этой задачи не может быть проведено здесь, поскольку выше изучалось лишь одномерное течение. Однако общие соображения показывают, что при таком слоистом строении потока возбуждение акустических колебаний становится менее вероятным. Известно, например, что при подводе тепла равномерно ко всем струям газа, пересекающим плоскость теплоподвода, тепловое сопротивление становится наибольшим по сравнению со случаями, когда то же суммарное количество тепла сообщается лишь части струек течения, пересекающих эту плоскость. Следовательно, механизм возбуждения колебаний, связанный с возмущением теплового сопротивления, не сможет проявиться здесь в полной мере.

Не имея возможности рассматривать здесь теоретическую сторону вопроса, сошлемся на экспериментальный факт, подтверждающий высказанные соображения.

В опытах Лемана ¹⁾ по возбуждению звука в трубе Рийке, которые будут подробно рассматриваться в следующем параграфе, нагревание воздуха происходило за счет пропуска электрического тока через тонкие проволочки (диаметром 0,2 мм), расположенные на расстояниях 2 мм друг от друга в некотором сечении трубы. Возбуждение акустических колебаний происходило лишь в том случае, если на расстоянии порядка 1 мм от этих проволочек по потоку помещалась густая проволочная сетка. Эта сетка нагревалась от расположенных вблизи раскаленных проволочек и передавала тепло к текущему воздуху. Удаление сетки прекращало звучание даже в том случае, если суммарное количество подводимого к воздушному течению тепла оставалось прежним. Этот эффект может быть объяснен тем, что после удаления густой сетки поток за проволочками становился слоистым, поскольку нагреваемые проволочки были расположены недостаточно густо — расстояния между ними в десять раз превышали их диаметр.

¹⁾ L e h m a n n K. O., Über die Theorie der Netztöne, Annalen der Physik, 5 Folge 29, 1937.

ГЛАВА X

НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ САМОВОЗБУЖДЕНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

§ 48. Возбуждение звука в трубе Рийке

Если рассмотренные в предыдущих параграфах процессы вращательного горения были в той или иной степени связаны с подвижностью фронта пламени, то классическим примером системы, в которой подвижность поверхности теплопровода совершенно исключена, является труба Рийке. Кроме того, устанавливаемая в такой трубе сетка настолько тонка, что можно пренебрегать ее протяженностью в направлении оси трубы и поэтому полагать объем V в уравнениях (15.5) равным нулю. Это приводит к тому, что исключается и появление подвижности некоторого эффективного фронта пламени, который иногда полезно вводить из формальных соображений.

Следовательно, труба Рийке является наиболее ярким примером возбуждения акустических колебаний теплоподводом. Это обстоятельство делает целесообразным рассмотрение процесса возбуждения звука в такой трубе, хотя оно и не связано с каким-либо процессом горения.

Как уже говорилось, труба Рийке представляет собою вертикально установленную трубу, в которой осуществляется слабый проток воздуха. Обычно этот проток связан с тем, что установленная в одном из сечений трубы нагретая сетка несколько подогревает выходящие слои и создает таким образом тягу. Центральным при анализе возбуждения звука трубой Рийке является вопрос о передаче тепла от нагретой сетки к пересекающему ее воздуху и связи этой теплоотдачи с акустическими колебаниями. Основываясь на результатах, полу-

ченных в предыдущих главах, не представляет труда провести анализ этих вопросов.

Рассмотрим свойства поверхности теплоподвода Σ . В описываемом случае нагретая сетка и вводимая чисто формально плоскость теплоподвода Σ будут совпадать. Это, пожалуй, единственный случай, когда плоскость теплоподвода Σ имеет такой четкий физический смысл. Поскольку в обычном режиме сетка может нагреть пересекающий ее воздух лишь незначительно, будем считать, что $M_1 = M_2$, $n = 1$ и поэтому уравнения связи параметров колебаний слева и справа от Σ примут в простейшем случае вид (20.3):

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_2 &= \bar{v}_1 + \frac{\kappa - 1}{2(1 - M^2)} Q, \\ \bar{p}_2 &= \bar{p}_1 - M \frac{\kappa + 1}{2(1 - M^2)} \bar{Q}. \end{aligned} \right\} \quad (48.1)$$

Следует обратить внимание на то, что единственным параметром, от которого может зависеть самовозбуждение системы, является безразмерное возмущение теплоподвода $\bar{Q}$, которое можно [на основании формул (15.8) и (20.2)] записать в форме

$$\bar{Q} = 2M_1^3 \bar{Q}^* = \frac{2M_1^3}{Qv^3} \delta Q^*. \quad (48.2)$$

Рассмотрим более подробно возмущение теплоподвода δQ^* . Будем считать, что проволочки, составляющие нагретую сетку, достаточно тонки. В этом случае для расчета секундной теплоотдачи от сетки к воздуху можно воспользоваться одной из известных формул, например формулой Кинга¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} Q^* &= \frac{1}{F} \alpha (T_n - T) l, \\ \alpha &= \lambda \left(1 + \sqrt{\frac{2\pi \varrho c_1 D v}{\lambda}} \right), \end{aligned} \right\} \quad (48.3)$$

где λ — теплопроводность воздуха, D — диаметр проволочки, l — ее полная длина, T_n — температура проволочки, T — температура среды.

¹⁾ Попов С. Г., Измерение воздушных потоков, Гостехиздат, 1947.

Множитель $\frac{1}{F}$ введен в первую из написанных формул для приведения секундного потока тепла к единице площади сечения трубы.

Если частота колебаний мала, то, как это видно из второй формулы (48.3), возмущение Q^* , т. е. изменение δQ^* , будет происходить в фазе с изменением скорости течения δv :

$$\delta Q^* = \frac{i\lambda(T_w - T)}{2F} \sqrt{\frac{2\pi\rho c_p D}{\lambda v}} \delta v. \quad (48.4)$$

При больших частотах колебаний картина резко изменяется. Процессы в пограничном слое становятся существенно нестационарными, нестационарностью становится вследствие этого и теплоотдача. Теоретический анализ этого явления, как, впрочем, и экспериментальное его изучение представляют огромные трудности. Сравнительно недавно Лайтхиллом было получено приближенное теоретическое решение подобной задачи для ламинарного обтекания бесконечно длинной проволоки, обдуваемой потоком газа, направленного нормально к ней, скорость течения которого имеет малую синусоидальную составляющую¹⁾. Полученный им результат сводится вкратце к следующему: если частота колебаний весьма велика, то независимо от этой частоты фаза возмущения теплоотдачи начинает отставать от фазы возмущения скорости на угол $\frac{\pi}{2}$. Амплитуда возмущения теплоотдачи монотонно убывает с увеличением частоты колебаний. На рис. 95 представлен график, заимствованный из указанной работы, на котором приведены две кривые. Одна из них дает величину ψ — фазового запаздывания δQ^* относительно стационарного $\delta Q^*_{ст}$ (δQ^* , которое было бы при бесконечно малой частоте колебаний), а вторая — отношение амплитуд $\frac{|\delta Q^*|}{|\delta Q^*_{ст}|}$, равное η . Обе кривые построены в функции параметра $\frac{2\pi\Omega D}{r}$, где

¹⁾ L i g h t h i l l M. I., The response of laminar skin friction and heat transfer to fluctuations in the stream velocity. Proceedings of the Royal Society, Ser. A, vol. 224, № 1156, 1954.

Ω — частота акустических колебаний в герцах, а D — диаметр проволочки. Приведенные кривые показывают, что ослабление возмущения теплоподвода η при достаточно больших Ω может быть весьма значительным, а фазовое запаздывание нарастает с частотой достаточно быстро и практически достигает предельного значения, равного $\frac{\pi}{2}$, в момент, когда ослабление амплитуды возмущения теплоподвода имеет порядок 0,15. Если оценить порядок

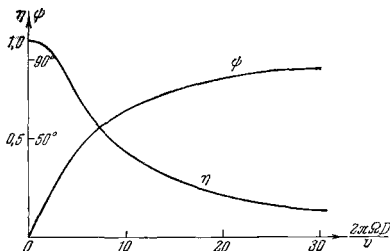


Рис. 95. Ослабление амплитуды η и фазовое запаздывание ϕ при передаче тепла от проволочки к течению воздуха, имеющему гармоническую составляющую.

величины параметра $\frac{2\pi\Omega D}{v}$, который может наблюдаться в трубе Рийке, то для $D = 1$ мм, $\Omega = 500$ герц и $v = 0,1$ м/сек получим его близким к 30. Это указывает, что в трубе Рийке можно ожидать существенного ослабления амплитуды возмущения теплоподвода (приблизительно в 10 раз по сравнению с соответствующей величиной для квазистационарного процесса) и предельного фазового запаздывания, равного $\frac{\pi}{2}$.

Если ослабление амплитуды возмущения теплоподвода имеет только количественное влияние на процесс возбуждения звука в трубе Рийке, то фазовое запаздывание является важнейшим фактором в рассматриваемом

явлении. Легко убедиться, что при отсутствии фазового запаздывания звук в трубе Рийке не возбуждался бы никогда. Действительно, если бы фаза $\bar{Q}$ и фаза $\bar{v}_1$ совпадали [формула (48.4)], то на основании формул (17.1) и (48.1)

$$\left. \begin{aligned} \delta E + \bar{v}_2 - \bar{v}_1 &= \frac{\kappa}{2(1-M^2)} Q, \\ \delta X + p_2 - p_1 &= M \frac{\kappa-1}{2(1-M^2)} \bar{Q} \end{aligned} \right\} \quad (48.5)$$

δE имело бы также фазу, совпадающую с фазой v_1 , а δX — противоположную фазу. Предполагая отсутствие потерь во внешнюю среду, можно было бы написать условные возбуждения акустических колебаний в виде неравенства

$$\bar{A}_2 > 0.$$

В то же время по формуле (19.2)

$$\bar{A}_2 = \frac{1}{2}(p_1 \delta E + \bar{v}_1 \delta X + \delta E \delta X).$$

Поскольку внешние потери отсутствуют, $p_1 = v_1$, а следовательно, первое из трех слагаемых $\bar{A}_2$ равно нулю, а два других — отрицательны (δX находится в противофазе с $\bar{v}_1$ и δE). Следовательно, $\bar{A}_2 < 0$, и возбуждение звука невозможно. Таким образом, запаздывание фазы возмущения скорости является необходимым условием самовозбуждения акустических колебаний в трубе Рийке.

Не следует думать, что использование теоретических кривых Лайтхилла всегда дает предельное фазовое запаздывание, равное $\frac{\pi}{2}$. Приведенный выше численный пример соответствовал в некотором смысле крайнему случаю. Более реальным случаем будет возбуждение звука в длинной трубе Рийке при помощи сетки, состоящей из сравнительно тонких проволок. Если положить $\Omega = 100$ герц; $D = 0,3$ мм; $v = 0,3$ м/сек, то $\frac{2\pi\Omega D}{v} \sim 0,6$, т. е. фазовое запаздывание ψ будет порядка нескольких градусов, а ослабление амплитуды возмущения тепло-

подвода практически будет отсутствовать вовсе ($\eta \cong 1$). Таким образом, можно ожидать, что в трубе Рийке будет иметь место весьма широкий диапазон изменений параметра $\frac{2\pi\Omega D}{v}$ и связанных с ним явлений.

Здесь уместно подчеркнуть, что использование теоретических результатов Лайтхилла для расчета самовозбуждения звука в трубе Рийке вряд ли возможно признать, без дальнейшего исследования этого вопроса, законной операцией.

Составляющие сетку проволоочки работают в совершенно иных условиях, чем те, которые положил в основу своего расчета Лайтхилл. Он рассматривал одиночную проволоку в бесконечном пространстве, в то время как в сетке расстояния между проволочками имеют порядок их диаметра, и взаимное влияние соседних проволочек безусловно значительно. Кроме того, Лайтхилл считал, что синусоидальная составляющая скорости течения мала по сравнению с его средней скоростью, в то время как опыты Лемана¹⁾ показали, что фактически в трубе Рийке амплитуда колебания скорости в 2—6 раз превосходит среднюю скорость течения. Совершенно ясно, что такое изменение условий обтекания проволоки должно существенно изменить кривые на рис. 95.

Опыты Лемана косвенно подтверждают высказанное здесь предположение. Если бы кривые Лайтхилла можно было непосредственно прилагать к сеткам в трубе Рийке, то изменение диаметра проволочек в сильной степени влияло бы на самовозбуждение звука. Однако упомянутые опыты показывают, что подобное влияние практически отсутствует.

В настоящее время нет данных по нестационарной теплоотдаче от нагретых сеток, поэтому количественный анализ звучания трубы Рийке фактически невозможен. Чтобы дать качественное представление об этом явлении, можно воспользоваться кривой Лайтхилла, которая дает возможность учитывать наиболее существенный фактор — наличие фазового запаздывания между возмущением теплоподвода и возмущением скорости.

¹⁾ L e h m a n n K. O., Über die Theorie der Netztöne, Annalen der Physik, 5 Folge 29, 1937.

Прежде чем приступить к численному анализу возбуждения звука в трубе Рийке, необходимо уточнить формулы первого приближения (48.1), которые использовались до сих пор в качестве соотношений, описывающих процесс на поверхности теплоподвода Σ . В эти соотношения необходимо внести уточнения. Во-первых, можно было бы уточнить их, учтя, что температура воздуха, прошедшего через сетку, выше температуры воздуха, подходящего к сетке. В уже упоминавшихся опытах Лемана было показано, что на нормальных режимах воздух после сетки нагревается на $100-150^\circ$, т. е. сравнительно мало. Поэтому учет нагрева (т. е. учет того, что $M_1 \neq M_2$; $n \neq 1$) не сможет заметно сказаться на результатах анализа.

Более существенным является учет гидравлического сопротивления сетки. При рассмотрении процесса горения в тонках или камерах сгорания обычно можно пренебрегать гидравлическими потерями, так как они невелики. При описании возбуждения звука в трубе Рийке всегда указывается, что сетка должна быть густой, а это влечет за собою заметные гидравлические сопротивления. Полученные в гл. IV общие уравнения позволяют учитывать и этот фактор. Если исходить из системы уравнений (20.1) и учесть, что все члены, связанные с возмущением теплоподвода, кроме $\bar{Q} - 2M_1^2 Q^*$, равны нулю, можно получить вместо соотношений (48.1) следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_2 &= \bar{v}_1 + \frac{\kappa-1}{2(1-M^2)} \bar{Q} - \frac{\kappa M^3}{1-M^2} \bar{P}_x, \\ \bar{p}_2 &= \bar{p}_1 - M \frac{\kappa-1}{2(1-M^2)} \bar{Q} + \frac{(\kappa-1)M^4 + M^2}{1-M^2} \bar{P}_x. \end{aligned} \right\} \quad (48.6)$$

Соответственно вместо равенств (48.5) надо будет написать:

$$\left. \begin{aligned} \delta E &= \frac{\kappa-1}{2(1-M^2)} \bar{Q} - \frac{\kappa M^3}{1-M^2} \bar{P}_x, \\ \delta X &= -M \frac{\kappa-1}{2(1-M^2)} \bar{Q} + \frac{(\kappa-1)M^4 + M^2}{1-M^2} \bar{P}_x. \end{aligned} \right\} \quad (48.7)$$

Величину $\bar{P}_x$ легко связать с коэффициентом гидравлического сопротивления ζ , если считать, что в этом

случае применима гипотеза стационарности. Действительно, обозначив потери давления на сетке p_ξ , запишем обычное гидравлическое равенство

$$p_\xi = \zeta \frac{\rho v^2}{2}.$$

Возмущение этой величины будет равно

$$\delta p_\xi = \zeta \rho v \delta v_1.$$

Величина $P_x = \delta p_\xi$ будет характеризовать спловое воздействие сетки на поток. Переход к безразмерным переменным (15.8) дает

$$\bar{P}_x = - \frac{\delta p_\xi}{\rho v^2} = - \frac{\zeta}{M} \bar{v}_1. \quad (48.8)$$

Величину $\bar{Q}$ определим, исходя из равенств (48.2) и (48.3). Предположим, что входящий в выражение для α (48.3) корень заметно больше единицы¹⁾:

$$\sqrt{\frac{2\rho \alpha_r D r^2}{\lambda}} \gg 1. \quad (48.9)$$

Тогда можно написать, что

$$Q^* = A \sqrt{v},$$

где A - некоторая постоянная.

Соответственно

$$\delta Q_{ст}^* = \frac{A}{2} \frac{1}{v^{1/2}} \delta v_1$$

или

$$\delta Q_{ст}^* = \frac{Q^*}{2v} \delta v_1. \quad (48.10)$$

Воспользовавшись формулой (48.2), запишем:

$$\bar{Q}_{ст} = \frac{Q^*}{\rho a^2 v} \bar{v}_1, \quad (48.11)$$

где Q^* соответствует теплоподводу от сетки при отсутствии возмущений течения.

¹⁾ Если это условие не выполняется, то формула (48.10) становится несколько сложнее и точно получается из (48.3) и (48.4). Обычно условия (48.9) выполняются

Формулы (48.7), (48.8) и (48.11) полностью определяют процесс на поверхности разрыва Σ , если считать, что известен теплоподвод Q^* , коэффициент гидравлического сопротивления сетки ξ и параметры η и ψ , характеризующие отклонения от стационарности процесса теплоотдачи от сетки к воздуху.

Располагая всеми указанными данными, можно было бы решить соответствующую красивую задачу, подобно тому, как это делалось в гл. V, VI и других местах. Однако достаточно полное представление о возбуждении звука в трубе Рийке более просто получить путем использования энергетического метода, развитого в гл. III и IV. В рассматриваемом случае применение энергетического метода паирашивается потому, что частоты возбуждаемых колебаний можно считать известными. Все исследователи, наблюдавшие звучание трубы Рийке, всегда указывают, что возбуждаются колебания с частотами, определяемыми обычными акустическими соотношениями (т. е. не требующими для своего определения учета постоянной составляющей скорости течения вдоль трубы и учета свойств зоны теплоподвода). Поскольку единственный важный параметр колебаний — частота, — определение которого из энергетических соображений невозможно, известен, использование энергетического метода является совершенно естественным.

В качестве типичных численных данных используем те, которые были реализованы в опытах Лемана. Это позволит сопоставить результаты расчета с экспериментом. В названных опытах основная масса экспериментов была проведена на трубе, имевшей диаметр $d=67$ мм и общую длину $L=1140$ мм. В трубе обычно возбуждались колебания основного тона (частота 165 гц) и иногда второй гармоники (частота 330 гц). Скорость течения в трубе изменялась по желанию экспериментатора, так как она создавалась не тягой, а вентилятором, питавшим воздухом большой ресивер, к которому присоединялась труба. Располагавшаяся в некотором сечении трубы тонкая проволока (диаметр 0,2 мм, шаг 2 мм) нагревалась электрическим током. В непосредственной близости от нее помещалась частая металлическая сетка, которая воспринимала тепло от раскаленной проволоки и передавала

его воздуху. Как уже указывалось, сама раскаленная проволока (без частой сетки) звука возбудить не могла. Диаметр проволочек, из которых составлялась частая сетка, оказывал лишь незначительное влияние на процесс возбуждения звука (в опытах Лемана количество ячеек на 1 см^2 менялось от 1115 до 46,8, что, по-видимому, соответствует изменению диаметров проволочек, составлявших сетку от 0,1 мм до 0,5 мм). Средняя скорость течения по трубе изменялась от 0 до 0,7 м/сек. Наиболее сильное звучание получалось при скоростях 0,3 - 0,45 м/сек. Количество тепла, которое передавалось от сетки к воздуху, изменялось от 272 до 480 ватт.

Примем для расчета некоторые средние значения параметров, характерные для опытов Лемана. Пусть скорость течения $v = 0,35 \text{ м/сек}$, средний теплоподвод $Q^* = 432 \text{ ватта}$, средняя скорость звука в трубе равна 376 м/сек (она определена из наблюдавшихся частот колебаний), а диаметр проволочек, из которых составлена сетка, $D = 0,35 \text{ мм}$. Для основного тона ($\Omega = 165 \text{ герц}$) это даст $\frac{2\pi\Omega D}{v} \simeq 1$ и соответственно $\eta \simeq 1$ и запаздывание $\psi \simeq 6^\circ$.

Хотя последние величины получены на основе графика Лайтхилла (рис. 95), допустимость применения которого вызывает законное недоверие, здесь они будут взяты в качестве некоторых параметров первого приближения, имеющих, вероятно, правильные порядки величин, тем более, что другие данные в настоящее время отсутствуют. Главное, что здесь вводится, — это некоторое запаздывание возмущения теплоподвода Q относительно возмущения скорости $\bar{v}$.

Воспользуемся теперь известным энергетическим условием (19.3), справедливым для границы устойчивости

$$A_2 - \bar{R} = 0. \quad (48.12)$$

Вычислим обе входящие в написанное равенство величины. Как уже упоминалось в настоящем параграфе,

$$\bar{A}_2 = \frac{1}{2} [\bar{\rho}_1 \delta E + \bar{v}_1 \delta X + \delta E \delta X].$$

Определим фазовые сдвиги между векторами, входящими в написанное равенство. Предварительно рассмотрим положение векторов на рис. 96. Векторы $\bar{p}$ и $\bar{v}$ направлены как обычно — первый в положительную сторону оси x , а второй — оси y (здесь предполагается малость R). Вектор $\bar{P}_x$, как это следует из равенства

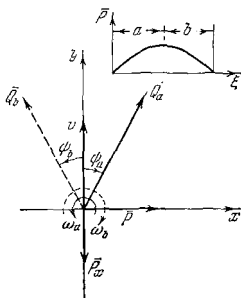


Рис. 96. Фазовое смещение вектора $\bar{Q}$ вследствие запаздывания в зависимости от положения сечения теплоподвода относительно стоячей волны колебаний давления.

баний давления, охватывающая половину полной длины волны. Изображаемая на этой схеме полуволна разбита на участки a и b , лежащие по разные стороны пучности давления. На участке a при переходе через максимум давления возмущение скорости течения изменяет знак — из положительного (направленного к пучности давления) оно становится отрицательным. Это происходит потому, что при постепенном сжатии газа массами, движущимися к пучности давления, давление возрастает, достигает максимума, после чего колебательная составляющая скорости течения изменяет знак, так как газ приобретает составляющую движения влево, в сторону

(48.8), всегда направлен в сторону, противоположную вектору $\bar{v}$. Вектор $\bar{Q}$ при очень малых частотах имеет ту же фазу, что и $\bar{v}$, а вообще его фаза сдвинута относительно $\bar{v}$ на угол ψ в результате запаздывания. Чтобы определить, в какую сторону от оси y откладывать угол ψ , для нахождения фаз $\bar{Q}$ следует учесть направление вращения всей диаграммы векторов с угловой скоростью ω . Легко сообразить, что это направление будет различным для разных участков стоячей волны давления. В верхней части рис. 96 дана схема стоячей волны коле-

пониженных давлений. Точно такой же процесс на участке b приводит к тому, что при переходе возмущения давления через максимум колебательная составляющая скорости течения, изменяя знак, превращается из отрицательной в положительную. Поэтому на векторной диаграмме, приведенной на рис. 96, направление ω для участков a и b будет различным: для участка a — против часовой стрелки, для участка b — по часовой стрелке. Вообще при принятых направлениях отсчета участки стоячей волны, лежащие между узлом и пучностью давления и расположенные влево от пучности давления, будут характеризоваться направлением угловой скорости ω_a , а остальные участки — угловой скоростью ω_b . Поскольку фазовый сдвиг ψ обусловлен запаздыванием, постольку и положение вектора $\bar{Q}$ будет различным: $\bar{Q}$ для участков a будет сдвинуто на угол ψ вправо от $\bar{v}_1$, для участков b — влево.

Рассмотрим теперь выражение для $\bar{A}_x$.

Воспользовавшись равенствами (48.7) и пренебрегая малым слагаемым $\frac{\kappa M^3}{1-M^2} \bar{P}_x$ и величиной M^4 по сравнению с M^2 , можно для участков a написать:

$$\begin{aligned} \bar{A}_x = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{\kappa-1}{2(1-M^2)} |\bar{p}_1| \cdot |\bar{Q}| \cos(90^\circ - \psi) + \right. \\ & + M \frac{\kappa-1}{2(1-M^2)} |\bar{v}_1| |\bar{Q}| \cos(180^\circ + \psi) - \\ & - \frac{M^2}{1-M^2} |\bar{P}_x| |\bar{v}_1| - \left[\frac{\kappa-1}{2(1-M^2)} \right]^2 M |\bar{Q}|^2 + \\ & \left. + \frac{(\kappa-1)M^2}{2(1-M^2)^2} |\bar{Q}| |\bar{P}_x| \cos(180^\circ - \psi) \right\}. \end{aligned}$$

Для участков b $\bar{A}_x$ будет выражаться точно так же, за исключением того, что знаки перед ψ надо будет изменить на обратные.

Упростим написанное выражение, полагая $1-M^2=1$, $\frac{\kappa-1}{2}=0,2$, а угол ψ — малым по абсолютному значению.

Тогда для участков a

$$\bar{A}_z \cong \frac{1}{2} [0,2 \bar{p}_1 |\bar{Q}| \sin \psi - 0,2M |\bar{v}_1|, \bar{Q} - \\ - M^2 |\bar{P}_x| |\bar{v}_1| - 0,04M |\bar{Q}|^2 - 0,2M^2 |\bar{Q}|, P_x]. \quad (48.13)$$

Как следует из написанного равенства, при малых по абсолютному значению ψ все слагаемые, кроме первого, дают отрицательные величины, т. е. гасят колебания. Лишь первое слагаемое может быть положительным при $\psi > 0$, что возможно лишь для участков a . Для участков b $\psi < 0$ п, как это следует из написанной формулы, возбуждение невозможно. Этот результат можно было ожидать, так как выше неоднократно указывалось, что при положении вектора возмущающего теплоподвода во второй четверти возбуждение невозможно (см., например, диаграммы устойчивости рис. 29).

Подставим в соотношение (48.13) найденные несколько выше значения $\bar{Q}$ и $\bar{P}_x$. Для выбранных численных величин

$$\bar{Q} = \frac{0,7}{v} \bar{v}_1, \quad (48.14)$$

где v следует брать в м/сек. Чтобы определить величину $\bar{P}_x$, зададим $\xi = 5$, что приблизительно соответствует (при малых числах Рейнольдса) проволоочной сетке с отношением живого сечения к сечению трубы порядка $0,4 - 0,5$ ¹⁾. Производя необходимые вычисления, получим следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_z &= 0,02 |\bar{v}_1| |\bar{p}_1| - 0,0035 |\bar{v}_1|^2 \text{ для участка } a, \\ \bar{A}_z &= -0,02 |\bar{v}_1| |\bar{p}_1| - 0,0035 |\bar{v}_1|^2 \text{ для участка } b. \end{aligned} \right\} \quad (48.15)$$

Изменение $|\bar{v}_1|$ и $|\bar{p}_1|$ в зависимости от положения сетки по длине трубы можно принять

$$|\bar{v}_1| = c |\cos \varphi|, |\bar{p}_1| = c |\sin \varphi| \quad (c > 0),$$

где $\varphi = k\pi\xi$, как это следует из формул (6.3).

¹⁾ Идельчик И. Е., Справочник по гидравлическому сопротивлению фасонных и прямых частей трубопроводов. Издание Центрального аэрогидродинамического института им. Н. Е. Жуковского, 1950.

График изменения $\frac{A_z}{c^2}$ в функции параметра φ приведен на рис. 97. Как видно из графика, положительные значения $\bar{A}_z$ простираются от $\varphi = 10^\circ$ до $\varphi = 90^\circ$. Равенство (48.12) позволяет учесть потери энергии, связанные с излучением ее из открытых концов трубы. При наличии потерь на излучение векторы $\mathbf{p}_1$ и $\bar{\mathbf{v}}_1$ перестают

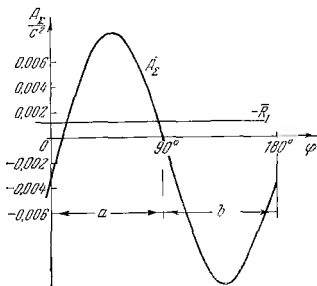


Рис. 97. Поток акустической энергии в зависимости от положения плоскости теплоподвода по длине трубы.

быть взаимно перпендикулярными и поэтому формула (48.13) должна была бы включать дополнительный поворот $\bar{\mathbf{p}}_1$ относительно $\mathbf{p}_1$, но поскольку для малых потерь этот поворот тоже будет мал, здесь соответствующее уточнение вводиться не будет, и выражение $\bar{A}_z$, даваемое формулами (48.15), будет считаться правильным.

При заданных d и L концевой индекс трубы (30.8) будет равен

$$z = 0,000216\omega^2 + 0,0187\omega i,$$

причем безразмерная частота колебаний ω для первой гармоники равна $\omega = \pi$, а для второй $\omega = 2\pi$.

Воспользовавшись найденным значением z , определим потери на излучение из обоих концов трубы. Это можно сделать путем удвоения потока акустической энергии из одного концевое сечения

$$\bar{R} - \bar{p} \bar{v}.$$

При этом следует учесть, что $|\dot{v}| \cong c$, а величина $\bar{p}$ и угол между $\bar{p}$ и $\bar{v}$ легко находятся из равенства

$$\bar{p} = z \bar{v}.$$

Вычисления дают для первой гармоники

$$\frac{\bar{R}_I}{c^2} = 0,0014,$$

а для второй

$$\frac{R_{II}}{c^2} = 0,0056.$$

Прямая $\frac{\bar{R}_I}{c^2}$ нанесена на график рис. 97. Она позволяет выделить область неустойчивости, соответствующую $\bar{A}_2 - \bar{R}_I > 0$, которая простирается от $\varphi \cong 14^\circ$ до $\varphi \cong 87^\circ$. Совершенно аналогичное построение можно привести и для второй гармоники. Если при этом учесть, что вследствие увеличения параметра $\frac{2\pi\Omega D}{v}$ вдвое примерно во столько же раз увеличивается и запаздывание, а потери $\frac{\bar{R}_{II}}{c^2} \cong 0,0056$, то область неустойчивости оказывается расположенной от $\varphi = 13^\circ$ до $\varphi = 83^\circ$.

Воспользовавшись уже приводившимся соотношением $\varphi = k\pi\xi$ ($k=1$ для первой гармоники и $k=2$ для второй), построим области неустойчивости для двух первых гармоник в функции относительного положения сетки по длине трубы (рис. 98). Приведенная диаграмма хорошо согласуется с опытными данными. Во-первых, видно, что основной тон трубы может быть возбужден лишь в том случае, если координата $\xi < 0,5$, т. е. если сетка находится в нижней части трубы. Более того, если вернуться к рис. 97, то сразу видно, что наибольшего значения раз-

ность $\bar{A}_2 - \bar{R}$ достигает приблизительно при $\varphi = \frac{\pi}{4}$, т. е. при $\xi = 0,25$. Это полностью согласуется с указаниями экспериментаторов, что наиболее сильное звучание имеет место в том случае, если нагретая сетка располагается на расстоянии, равном $1/4$ общей длины трубы,

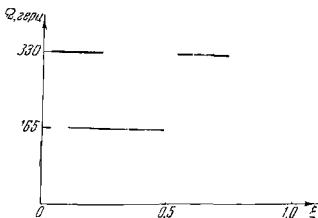


Рис. 98. Распределение областей неустойчивости по длине трубы для двух первых гармоник

считая от нижнего конца. При $\xi < 0,25$ становится неустойчивой и вторая гармоника. В опытах Лемана это обстоятельство было зарегистрировано в виде наложения колебаний двух гармоник при $\xi < 0,25$, причем по мере уменьшения ξ вторая гармоника начинала играть все более заметную роль. Соответствующие осциллограммы приведены на рис. 99.

Анализ построенных диаграмм объясняет и то, почему в опытах Боспа и Рисса звучание возбуждалось только в том случае, если $\xi > 0,5$, т. е. при положении сетки в верхней части трубы. Поскольку в этих опытах сетка была охлаждающей, то фаза теплоподвода, определенная по гипотезе стационарности, изменилась на π по сравнению с тем случаем, когда сетка нагрета. Это видно из формулы (48.4), поскольку у охлаждающей и нагревающей сеток знаки разности $T_{\pi} - T$ различны. Тогда, при запаздывании фазы теплоподвода, вектор $\bar{Q}$ попадает в четвертую четверть, если сетка расположена в области h

на рис. 96, а это соответствует наилучшим условиям возбуждения. В то же время положение сетки в области a приводит $\bar{Q}$ в третью четверть, в которой при малых M практически отсутствуют области возбуждения, поскольку диаграмма устойчивости приближается к виду, показанному на рис. 29, в.

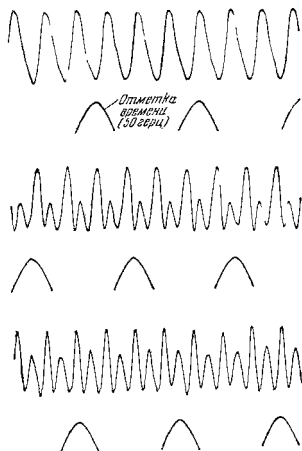


Рис. 99. Осциллограмма колебаний давления в трубе Рийке по опытам Лемава. Верхняя осциллограмма соответствует $\xi = 0,25$; средняя $\xi = 0,125$; нижняя $\xi = 0,0625$.

Резюмируя, можно утверждать, что даже использование столь грубой для рассматриваемых условий схемы явления нестационарной теплоотдачи, как та, которая следует из теоретических расчетов Лайтхилла, позволяет получить все наиболее существенные свойства трубы Рийке.

Помимо уже известных свойств трубы Рийке, Леман, воспользовавшись тем, что он имел возможность регулировать среднюю скорость течения по своему усмотрению, обнаружил новое ее свойство: по мере увеличения средней скорости течения и при постоянном среднем теплоподводе звучание трубы Рийке первоначально усиливается, достигает максимума интенсивности, затем уменьшается и при достижении некоторой скорости, зависящей от среднего теплоподвода, прекращается.

Прекращение звучания трубы Рийке при некоторой, достаточно большой, скорости может быть понято из написанных выше формул. Действительно, пусть средний теплоподвод сохранится постоянным: $Q^* = \text{const.}$ Тогда, как это следует из выражения (48.11), $|\bar{Q}|$ будет уменьшаться, а следовательно, будет уменьшаться тот единственный член выражения (48.13), который дает положительный поток акустической энергии $\bar{A}_2$. В то же время основное слагаемое, дающее отрицательную составляющую $\bar{A}_2$, $M^2 |P_x| |\bar{v}_1|$, будет увеличиваться, поскольку с учетом выражения (48.8)

$$M^2 |P_x| |\bar{v}_1| = \zeta M |\bar{v}_1|.$$

В рассмотренном выше случае, при оптимальном положении сетки ($\xi = 0,25$, т. е. $|\bar{v}_1| = |p_1| \cdot 0,707 c$), указанные два члена в сумме (48.13) дадут

$$\frac{1}{2} 0,707^2 c^2 \left(0,2 \frac{0,7}{v} \sin \psi - 5 \frac{v}{a} \right),$$

т. е. выражение, которое монотонно уменьшается с увеличением v . Если провести более точный численный анализ, то без учета возможного изменения ψ $\frac{\bar{A}_2}{c^2}$ становится равным $\frac{\bar{R}}{c^2}$ при скорости порядка $0,75$ м/сек. Эксперимент дал эту величину равной $0,6$ м/сек. Для столь сложного явления надо признать хорошим такое совпадение теоретического расчета с опытными данными.

Помимо прекращения звучания трубы Рийке при увеличении средней скорости течения, тот же эффект наблюдался и при уменьшении ее до величины порядка

0,15 мсек. Это, по всей вероятности, связано с тем, что при уменьшении средних скоростей течения и сохранении средней величины теплоподвода неизменной происходит сильное нагревание воздуха в окрестности сетки (в том числе и перед ней) и подогрев притекающего воздуха в значительной доле осуществляется за счет естественной турбулентности течения в результате смешения молей холодного и горячего воздуха еще до пересечения первыми области расположения сетки. Поскольку турбулентное смешение холодных и горячих молей происходит в первом приближении независимо от акустических колебаний, то это приводит к разрыву обратной связи в колебательной системе. Надо заметить, что приведенное предположение не подвергалось количественной проверке и поэтому его следует рассматривать лишь как одно из возможных объяснений прекращения звучания трубы Рийке при малых значениях средних скоростей течения.

§ 49. Вибрационное горение при распространении пламени в неподвижном газе

Одним из первых тщательно поставленных опытов по вибрационному горению был эксперимент Коварда, Хартвелла и Джорджсона, который уже упоминался в предыдущих главах. Напомним, что в указанном эксперименте изучалось распространение фронта пламени вдоль трубы, заполненной неподвижной горючей смесью, причем один из концов трубы был закрыт, а поджигание велось от открытого конца.

В этом опыте почти однозначно определен основной механизм обратной связи, что допускает достаточно полное аналитическое рассмотрение вопроса. Действительно, поскольку речь идет о горении в заранее подготовленной однородной горючей смеси, то все механизмы обратной связи, основанные на смесеобразовании, сразу исключаются. Точно так же исключаются механизмы, в которых основную роль играет вихреобразование и т. п. гидромеханические причины. Из явлений, связанных с собственно горением, сразу исключается вся группа процессов, реализация которых требует наличия под-

жигающего источника (вроде ацетиленовой горелки и т. п.). Зависимость скорости распространения пламени от параметров неподвижной среды, в которую движется фронт пламени, более или менее известна. Однако ни колебания давления, ни колебания температуры в неподвижном газе, которые наблюдались в опыте, не могут вызвать столь сильного изменения скорости распространения пламени, чтобы система возбудилась. По этой же причине привлечение разного рода соображений, связанных с изменением периода индукции, обусловленным, например, колебаниями давления, тоже не может дать сколько-нибудь убедительных результатов. По-видимому, главным механизмом обратной связи, который играет в этом опыте решающую роль, является механизм, связанный с периодическим волнообразованием на поверхности пламени, который рассматривался во второй половине § 38.

В отличие от приведенного выше принципиального рассмотрения указанной задачи, здесь будет дано решение для несколько упрощенных условий, но доведенное до конца.

Как уже указывалось в § 38, при акустических колебаниях среды расположенный в ней фронт пламени испытывает действие ускорений, изменяющихся периодически. В этом случае отклонение возмущенного фронта пламени от его стационарного положения $x = 0$ в направлении оси x (при некотором заданном значении координаты y) описывается уравнением Матье (38.25) (здесь z — величина, пропорциональная времени t):

$$A''(z) - 2q \cos 2z A(z) = 0. \quad (49.1)$$

Поскольку трубы, в которых ставились опыты Ковардом, Хартвеллом и Джорджсоном, располагались горизонтально, коэффициент a в уравнении (38.25) принят равным нулю. С тем, чтобы сделать возможным решение написанного уравнения в элементарных функциях, введем следующее упрощение. Заменим периодическую функцию $\cos 2z$ приближенной, составленной из участков с постоянными значениями функции, как показано на рис. 100. Кроме того, сместим начало отсчета аргумента z на $\frac{\pi}{4}$.

введя переменную $z_1 = z + \frac{\pi}{4}$. Тогда вместо уравнения (49.1) можно будет написать

$$A''(z_1) + \varphi(z_1) A(z_1) = 0, \quad (49.2)$$

где $\varphi(z_1) = +m^2$ для интервалов $0 < z_1 < \frac{\pi}{2}$, $\pi < z_1 < \frac{3\pi}{2}$ и т. д. и $\varphi(z_1) = -m^2$ для интервалов $\frac{\pi}{2} < z_1 < \pi$, $\frac{3\pi}{2} < z_1 < 2\pi$ и т. д.

Величина m^2 определяется при этом следующей формулой:

$$m^2 = 16 \frac{h_0(q_1 - q_2)}{\lambda(q_1 + q_2)}. \quad (49.3)$$

Приведенное здесь выражение для m^2 получено из сравнения уравнения (38.25) с уравнением (49.2).

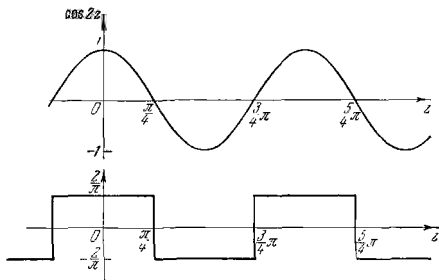


Рис. 100. Замена косинусоиды разрывной функцией типа меандра.

При этом учтено, что среднее значение $\cos 2z$ на интервале, где эта функция не меняет знака, равно по абсолютной величине $2/\pi$.

Уравнение (49.2), так же как и уравнение Матье, является уравнением с периодическим коэффициентом (коэффициент при $A(z_1)$ изменяется в функции z_1 по

закону, изображенному на графике в нижней части рис. 100). В соответствующих разделах математического анализа показано, что уравнение такого типа имеет решение вида

$$A(z_1) = C_1 e^{s_1 z_1} f_1(z_1) + C_2 e^{s_2 z_1} f_2(z_1), \quad (49.4)$$

к которому принадлежит и решение (38.26). При этом функции $f_1(z_1)$ и $f_2(z_1)$ являются периодическими, а характеристические показатели s_1 и s_2 — постоянными величинами.

Будем, основываясь на сказанном, искать решение уравнения (49.2) в виде

$$A(z_1) = C e^{s z_1} f(z_1). \quad (49.5)$$

Разобьем всю ось z_1 на участки длиной $\frac{\pi}{2}$; участками первого типа будем называть те, в которых $\varphi(z_1) = m^2$, участками второго типа те, где $\varphi(z_1) = -m^2$. Рассмотрим совокупность двух соседних участков первого и второго типа. Пусть, для определенности, это будут участки $0 \leq z_1 \leq \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2} \leq z_1 \leq \pi$. Тогда решением дифференциального уравнения (49.2) будет для первого участка

$$A_1 = C_1 e^{i m z_1} + C_2 e^{-i n z_1} \quad (49.6)$$

и для второго участка

$$A_2 = C_3 e^{m z_1} + C_4 e^{-m z_1}. \quad (49.7)$$

Эти решения необходимо «склеить» должным образом. Для этого надо потребовать, чтобы на соприкасающихся границах участков величины A_1 и A_2 , а также производные $\frac{dA_1}{dz_1}$ и $\frac{dA_2}{dz_1}$ совпадали. Кроме того, следует учесть требование, которое является следствием периодичности функции $f(z_1)$ в равенстве (49.5). Обозначим период рассматриваемой функции через τ ; тогда естественно допустить, что этот период будет совпадать с периодом функции $\varphi(z_1)$, входящей в уравнение (49.2), или будет кратен ему. Период функции $\varphi(z_1)$ равен, как это следует из рис. 100, $\tau = \pi$; поэтому можно написать еще два

условия, связывающие начало и конец интервала, соответствующего совокупности двух соседних участков первого и второго типов: $\alpha A_1(0) = A_2(\pi)$; $\alpha \frac{dA_1}{dz_1}(0) = \frac{dA_2}{dz_1}(\pi)$, где $\alpha = e^{i\pi}$. Таким образом, имеем следующие четыре условия:

$$\left. \begin{aligned} A_1\left(\frac{\pi}{2}\right) &= A_2\left(\frac{\pi}{2}\right); & \alpha A_1(0) &= A_2(\pi), \\ \frac{dA_1}{dz_1}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{dA_2}{dz_1}\left(\frac{\pi}{2}\right); & \alpha \frac{dA_1}{dz_1}(0) &= \frac{dA_2}{dz_1}(\pi). \end{aligned} \right\} \quad (49.8)$$

Подстановка в условия (49.8) решений (49.6) и (49.7) дает следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} C_1 e^{im\frac{\pi}{2}} + C_2 e^{-im\frac{\pi}{2}} - C_3 e^{m\frac{\pi}{2}} + C_4 e^{-m\frac{\pi}{2}} &= 0, \\ iC_1 e^{im\frac{\pi}{2}} - iC_2 e^{-im\frac{\pi}{2}} - C_3 e^{m\frac{\pi}{2}} + C_4 e^{-m\frac{\pi}{2}} &= 0, \\ \alpha C_1 + \alpha C_2 - C_3 e^{m\pi} - C_4 e^{-m\pi} &= 0, \\ i\alpha C_1 - i\alpha C_2 - C_3 e^{m\pi} + C_4 e^{-m\pi} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (49.9)$$

Система (49.9) может иметь тривиальные решения только в том случае, если ее определитель равен нулю. Если написать это условие, то после несложных, но достаточно громоздких вычислений получим следующее равенство:

$$\alpha^2 - 2 \left(e^{im\frac{\pi}{2}} + e^{-im\frac{\pi}{2}} \right) \left(e^{m\frac{\pi}{2}} + e^{-m\frac{\pi}{2}} \right) \alpha + 1 = 0$$

или

$$\alpha^2 - 2 \cos m \frac{\pi}{2} \operatorname{ch} m \frac{\pi}{2} \alpha + 1 = 0. \quad (49.10)$$

Пользуясь написанным здесь равенством, можно найти два значения α , при которых система (49.9) имеет решения, отличные от нуля. Эти два значения (α_1 и α_2) определяют два значения характеристических показателей s_1 и s_2 , входящих в общее решение (49.4). Даже не находя численных значений α_1 и α_2 , можно указать на некоторые свойства этих величин. Из вида коэффициентов квадратного уравнения (49.10) следует, что

$\alpha_1 \alpha_2 = 1$. Следовательно, если модуль одного из чисел больше единицы, то модуль другого меньше единицы, и наоборот. Таким образом, отличие модуля одного из чисел α_1 или α_2 от единицы говорит о том, что волновое движение на поверхности пламени неустойчиво, так как тогда среди α_1 и α_2 обязательно существует $|\alpha| > 1$, что соответствует $s > 0$, т. е. неустойчивости [не следует забывать, что независимая переменная z_1 в решении (49.4) пропорциональна времени t]. Следовательно, устойчивый процесс (без нарастания амплитуд колебаний со временем) возможен только при $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ или при комплексных значениях α_1 и α_2 . Действительно,

$$\alpha_{1,2} = \cos m \frac{\pi}{2} \operatorname{ch} m \frac{\pi}{2} + i \sqrt{1 - \cos^2 m \frac{\pi}{2} \operatorname{ch}^2 m \frac{\pi}{2}}. \quad (49.11)$$

При $\cos m \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{ch} m \frac{\pi}{2} < 1$ модуль числа α_1 или α_2 (квадрат которого равен сумме квадратов вещественной и мнимой частей) в точности равен единице. Это говорит о том, что характеристический показатель s имеет вещественную часть, равную нулю, т. е. амплитуды волн на поверхности пламени не станут возрастать с течением времени z_1 .

Формула (49.11) показывает, что величины $\alpha_{1,2}$ зависят от числа m . Проанализируем это влияние числа m на устойчивость более подробно. Такой анализ будет аналогичен рассмотренному в § 38 вопросу о влиянии коэффициента q на характер решения уравнения Матье. Сравнивая уравнения (49.1) и (49.2), можно установить между этими двумя параметрами численное соответствие, приближенно отвечающее существу явления:

$$m^2 \approx \frac{4}{\pi} q \quad (49.12)$$

(здесь принято, что среднее абсолютное значение $\cos 2z$ равно $\frac{2}{\pi}$).

При непрерывном изменении числа m корни α_1 и α_2 будут также меняться непрерывно. В силу того, что $\alpha_1 \alpha_2 = 1$, достаточно следить за каким-либо одним из этих

корней. Прежде чем приступать к анализу зависимости α от m , напомним, что функция $\operatorname{ch} x$ является четной, всегда положительной, монотонно возрастающей по $|x|$ и достигающей наименьшего значения $\operatorname{ch} x = 1$ при $x = 0$.

Пусть m увеличивается от 0 до ∞ . При $m = 0$ $\alpha_1 = 1$. При увеличении m α_1 становится комплексной величиной, пока $\cos^2 m \frac{\pi}{2} \operatorname{ch}^2 m \frac{\pi}{2}$ не начнет (вследствие монотонного возрастания $\operatorname{ch}^2 m \frac{\pi}{2}$) превышать единицу. В этот момент α_1 станет вещественным корнем. Далее, вследствие приближения $\cos^2 m \frac{\pi}{2}$ к нулю α_1 вновь примет комплексное значение и т. д. Следовательно, α_1 будет периодически становиться то вещественной, то комплексной величиной, причем по мере роста m интервалы значений m , где α_1 — комплексная величина, будут делаться все более узкими вследствие быстрого роста $\operatorname{ch}^2 m \frac{\pi}{2}$.

Описанному здесь чередованию интервалов значений m , где корень α_1 является вещественным или комплексным, соответствует чередование областей устойчивости и неустойчивости волнообразования на фронте пламени. Такое же чередование областей устойчивости и неустойчивости описывалось и выше, при рассмотрении уравнения Матвея (см. § 38).

Численный анализ дает в рассматриваемом случае следующие результаты:

при	$0 < m^2 < 1,39$	α_1 — комплексная величина,
при	$1,39 < m^2 < 9$	α_1 — отрицательная вещественная величина,
при	$9 < m^2 < 25$	α_1 — положительная вещественная величина,
при	$25 < m^2 < 49$	α_1 — отрицательная вещественная величина,

При написании этих неравенств не принимались во внимание узкие интервалы значений m^2 около $m^2 = 9$, $m^2 = 25$, $m^2 = 49$..., в которых α_1 является комплексной

величиной (непрерывный переход от α_1 отрицательных к α_1 положительным и обратно происходит через комплексные значения α_1).

Если сопоставить эти интервалы с соответствующими интервалами значений коэффициента q в уравнении Матье (см. § 38), то, пользуясь формулой (49.12), можно составить следующую сравнительную таблицу значений q :

Интервалы значений q , соответствующих областям неустойчивости

По уравнению Матье (49.1)	По уравнению (49.2)
$0,91 < q < 7,5$ $7,5 < q < 21$ $21 < q < 42$	$1,09 < q < 7,05$ $7,05 < q < 19,6$ $19,6 < q < 38,4$

Как видно из приведенной таблицы, численное соответствие между обеими сериями областей получилось много лучше, чем можно было бы ожидать от столь грубой идеализации — замены синусоиды ступенчатой разрывной функцией типа меандра. Это обстоятельство позволяет надеяться, что и другие стороны изучаемого явления будут переданы приближенным уравнением (49.2) не только качественно правильно, но и со вполне удовлетворительным количественным соответствием.

Как известно из § 38, где рассмотрено уравнение Матье, в первом и третьем интервалах, помещенных в таблице, период функций $f(z_1)$ в решении (49.4), частным случаем которого является и решение (38.26), равен 2π , в то время как во втором интервале он вдвое меньше. Тем же свойством обладают и функции $f(z_1)$, полученные путем решения уравнения (49.2). Действительно, для первого и третьего интервалов α_1 является отрицательной величиной, а для второго положительной. Следовательно, в последнем случае функция $f(z_1)$ вернется к той же фазе (точнее, фаза изменится на 2π) при изменении z_1 на π , а в первом случае ($\alpha_1 < 0$) фаза $f(z_1)$ будет отличаться от исходной на π (так как амплитуда $f(z_1)$

изменит свой знак). Поэтому при $\alpha_1 < 0$ возвращение к начальной фазе потребует двух шагов, каждый из которых сменит фазу на π , а оба вместе на 2π . Этим и доказывается высказанное утверждение.

Выше, в конце § 38, уже говорилось, что для того, чтобы колебания поверхности фронта пламени могли играть роль механизма обратной связи, поддерживающего акустические колебания среды, период этого волнообразования должен быть вдвое больше периода акустических колебаний (в переменной z_1 равного π). Поэтому для анализа взаимодействия волнообразования на поверхности пламени и акустических колебаний следует рассматривать только те диапазоны значений m^2 , для которых α_1 является отрицательной вещественной величиной. При этом наибольший интерес представляет первый из этих интервалов $1,39 < m^2 < 9$, который соответствует [как это следует из формулы (49.3)] наименьшим амплитудам смещений среды при акустических колебаниях h_0 .

Чтобы получить наглядное представление о функции $A(z_1)$, являющейся решением уравнения (49.2), приведем здесь численный пример. Пусть первоначальное возмущение на поверхности пламени было достаточно малым и к рассматриваемому моменту прошел достаточно большой промежуток времени, чтобы одно из слагаемых решения (49.4) уменьшилось до пренебрежимо малой величины. Поскольку здесь рассматривается случай неустойчивости, $|\alpha_1| > 1$, то в силу условия $\alpha_1\alpha_2 = 1$, $|\alpha_2| < 1$, т. е. второе слагаемое будет уменьшаться с течением времени. Выберем значение m^2 вблизи от границы первого интервала, характеризуемого $\alpha_1 < 0$. Пусть, например, $m^2 = 1,46$. Тогда $\alpha_1 = -1,6$. Выберем за начало отсчета времени z_1 момент, когда величина $A(z_1)$ вещественна и равна единице. Тогда, полагая $z_1 = 0$, найдем из равенства (49.6) $C_1 + C_2 = 1$. Входящие в решения (49.6) и (49.7) постоянные C_1 , C_2 , C_3 и C_4 являются, вообще говоря, комплексными величинами. Поэтому, обозначая $C_k = B_k + iD_k$ ($k = 1, 2, 3, 4$), можно написать

$$\left. \begin{aligned} B_1 + B_2 &= 1, \\ D_1 + D_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (49.13)$$

Введем обозначения

$$e^{im\frac{\pi}{2}} = a + bi; \quad e^{m\frac{\pi}{2}} = c. \quad (49.14)$$

Тогда

$$e^{-im\frac{\pi}{2}} = a - bi; \quad e^{-m\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{c}.$$

В конце первого участка функция $A_1(z_1)$ будет равна

$$A_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = a(B_1 + B_2) - 2bD_1 + ib(B_1 - B_2).$$

Нетрудно сообразить, что мнимая часть $A_1\left(\frac{\pi}{2}\right)$ равна нулю. Действительно, в конце второго участка функция $A_2(z_1)$ должна быть вещественной, так как $A_1(0) = \alpha_1 A_2(\pi)$, а α_1 и $A_1(0)$ — вещественные величины. По изменению функции A_2 на втором участке связано с множителями e^{mz_1} и e^{-mz_1} , которые тоже являются вещественными. Следовательно, функция $A_2(z_1)$ вещественна на всем участке, в том числе и в начале участка. Но тогда, в силу неразрывности функции A [первое условие «склейки» (49.8)], можно утверждать, что $A_1(z_1)$ в конце своего участка тоже является вещественной величиной. Условие отсутствия мнимой части у $A_1\left(\frac{\pi}{2}\right)$ приводит к равенству

$$B_1 = B_2,$$

которое в совокупности с (49.13) дает $B_1 = B_2 = \frac{1}{2}$.

Упомянувшееся только что требование, чтобы функция $A_2(z_1)$ была вещественной всюду, позволяет найти еще две величины: $D_3 = D_4 = 0$. С учетом найденных значений B_1 , B_2 , D_3 и D_4 и с учетом условия $D_1 = -D_2$ (49.13) равенство величин $A_1(z_1)$ и $A_2(z_1)$ при $z_1 = \frac{\pi}{2}$ выразится следующим образом:

$$a - 2bD_1 = cB_3 + \frac{B_4}{c}.$$

Условие $A_2(\pi) = \alpha A_1(0)$ даст:

$$B_1 c^2 + \frac{B_4}{c^2} = \alpha_1,$$

а условие совпадения производных [последнее условие (49.8)]:

$$B_3 c^2 - \frac{B_4}{c^2} = -\alpha_1 2D_1.$$

Система, составленная из трех последних равенств, позволяет найти D_1 , B_3 и B_4 . Несложные вычисления дают следующее (приводим значения всех B_k и D_k):

$$B_1 = 0,5, \quad D_1 = -0,6; \quad B_3 = -0,0392, \quad D_3 = 0,$$

$$B_2 = 0,5, \quad D_2 = 0,6; \quad B_4 = 7,4, \quad D_4 = 0.$$

Таким образом, функция $A(z_1)$ определена. Соответствующий график приведен на рис. 101. На этом же

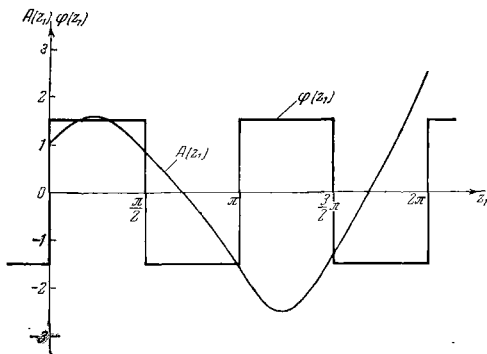


Рис. 101. Изменение амплитуды возмущения поверхности пламени A в функции безразмерного времени z_1 .

рисунке дана зависимость $\varphi(z_1)$. Если отвлечься от некоторого возрастания средней амплитуды $A(z_1)$ с течением времени z_1 (следствие неустойчивости), то можно говорить о том, что $A(z_1)$ является периодической функцией времени, которая достигает наибольших абсолютных величин приблизительно на серединах участков,

характеризуемых положительными значениями $\varphi(z_1) = m^2$. Это означает, что наибольшее положительное возмущение суммарной поверхности пламени будет происходить в эти моменты времени.

Возмущение эффективной скорости распространения пламени $\delta U_{\text{сгор}}$ (напомним, что $\delta U_{\text{сгор}}$ при увеличении абсолютной скорости сгорания является положительной величиной и отличается от δU_1 знаком) может быть на основе формулы (38.29) написано следующим образом:

$$\delta U_{\text{сгор}} = U_{\text{н. сг}} \frac{\delta S}{F} \quad (U_{\text{н. сг}} = -U_{\text{н}} > 0). \quad (49.15)$$

Следовательно [см. (38.20), (38.24), (38.30), (38.31)], максимальное значение $U_{\text{сгор}}$, так же как и $A(z_1)$, будет достигаться в моменты, которые соответствуют середине участков $\varphi(z_1) = +m^2$.

Функция $\varphi(z_1)$ есть результат грубой идеализации функции $2q \sin 2z_1 = 2q \sin \omega t$. Напомним [это проще всего видеть из равенств (38.22), (38.24) и (38.25)], что величина q пропорциональна действующим на поверхности пламени ускорениям. Это позволяет связать колебания скорости сгорания $\delta U_{\text{сгор}}$ с колебаниями скорости. Действительно, пусть колебания скорости в холодной части течения перед фронтом пламени равны

$$\delta v_1 = -(\delta v_1)_0 \cos \omega t, \quad (49.16)$$

где $(\delta v_1)_0$ — амплитуда колебаний δv_1 . Тогда возмущение ускорения, действующего на фронт пламени, запишется в виде

$$\delta b = \omega (\delta v_1)_0 \sin \omega t. \quad (49.17)$$

Можно считать, что в принятой схематизации этот закон с точностью до масштаба изображен в виде функции $\varphi(z_1)$ на рис. 101, при этом максимумы δb соответствуют серединам участков $\varphi(z_1) = +m^2$. Поскольку максимумы абсолютных величин $A(z_1)$, т. е. максимумы волнообразования на поверхности пламени, а следовательно, и максимумы возмущений поверхности пламени δS , тоже совпадают с серединами участков $\varphi(z_1) = +m^2$ (с наибольшими значениями возмущений ускорения δb), то фазовый сдвиг между δS и δb равен нулю и,

следовательно,

$$\delta S = (\delta S)_0 \sin \omega t. \quad (49.18)$$

Здесь $(\delta S)_0$ — амплитуда колебаний поверхности пламени. Заметим, что, согласно графику функции $A(z_1)$ на рис. 101, существуют моменты, когда $A(z_1)$ становится равным нулю, а фронт пламени перестает быть возмущенным. Очевидно, что при этом S достигает минимума, т. е. указанные моменты соответствуют в приведенной записи $\delta S = -(\delta S)_0$ (минимуму δS). Следовательно, «естественным» состоянием фронта пламени считается некоторая средняя искривленность, а наибольшими возмущениями [соответствующими $\delta S = +(\delta S)_0$ и $\delta S = -(\delta S)_0$] такие, которые либо удваивают эту среднюю искривленность, либо сводят ее до нуля. В первом случае происходит увеличение поверхности пламени против средней величины, во втором случае уменьшение этой поверхности.

Если обозначить входящую в формулу (49.15) величину относительного изменения поверхности пламени через $\overline{\delta S} = \frac{\delta S}{F}$, то, пользуясь уравнениями (49.16) и (49.18), можно установить фазовое соотношение между $\delta U_{\text{сгор}}$ и δv_1 :

$$\left. \begin{aligned} \delta U_{\text{сгор}} &= U_{\text{н. ср}} (\overline{\delta S})_0 \sin \omega t, \\ \delta v_1 &= (\delta v_1)_0 \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (49.19)$$

Как видно из написанных равенств, сдвиг по фазе между $\delta U_{\text{сгор}}$ и δv_1 равен $\frac{\pi}{2}$.

Рассмотрим вопрос о возбуждении акустических колебаний в трубе, закрытой с одного конца, когда процесс возмущенного горения описывается первым равенством (49.19). У закрытого конца трубы не может существовать средний поток акустической энергии, отличный от нуля. Поэтому колебания скорости δv_1 и давления δp_1 будут, при установившихся колебаниях, сдвинуты по фазе на $\frac{\pi}{2}$. Это значит, что колебания скорости сгорания $\delta U_{\text{сгор}}$ будут происходить в фазе или в противофазе с колебаниями

давления. Выше уже говорилось, что условия возбуждения вследствие колебаний теплоподвода и вследствие колебаний $\delta U_{\text{сгор}}$ в основных чертах совпадают, а в § 45 было показано, что близость фаз $\gamma = \delta U_{\text{сгор}}$ и δp_1 является наиболее благоприятной для возбуждения акустических колебаний. В тех случаях, когда δp_1 и $\delta U_{\text{сгор}}$ находятся в противофазе, возбуждение акустических колебаний невозможно. Сказанное здесь следует, в частности, и из вида типичной диаграммы границ устойчивости, приведенной на рис. 27.

Рассмотрим более подробно вопрос о том, когда фазы $\delta U_{\text{сгор}}$ и δp_1 будут совпадать. На рис. 102 дана схема движения газа в окрестности закрытого конца трубы в момент возмущения давления δp_1 через максимум. В момент, непосредственно предшествующий максимальному сжатию газа, воздушные массы еще движутся к закрытому концу (схема а), а в момент, непосредственно следующий за максимальным сжатием газа у закрытого конца трубы, начинают двигаться в сторону открытого конца трубы (схема б). Такой характер движения говорит о том, что на газы действует ускорение, направленное в положительную сторону оси x . Поскольку в момент максимального сжатия возмущение скорости δv_1 переходит через нуль, то в этот момент ускорение δb достигает наибольшей абсолютной величины [см. (49.16) и (49.17)].

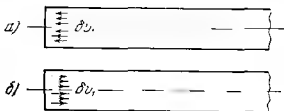


Рис. 102. Возмущения скорости течения в окрестности закрытого конца трубы.

Таким образом, в момент максимального сжатия у закрытого конца на газ, расположенный вблизи этой области сжатия, действует максимальное положительное ускорение. Физически этот результат кажется почти само собой разумеющимся. Максимуму положительного ускорения соответствует середина участка $\varphi(z_1) = +m^2$, т. е. моменты, когда δS , а следовательно и $\delta U_{\text{сгор}}$, достигает максимума. Поэтому в ближайшей окрестности

закрытого конца всегда будет наблюдаться совпадение фаз δp_1 и $\delta U_{\text{гор}}$, т. е. будут выполняться условия возбуждения. Что касается других участков трубы, то возможность самовозбуждения колебаний при нахождении фронта пламени в них существенно зависит от номера

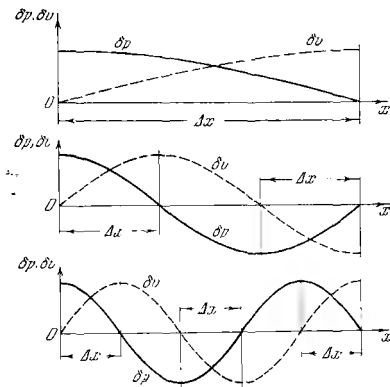


Рис 103. Эпюры стоячих волн колебаний для первых трех гармоник (труба с одним закрытым концом); Δx — интервалы, внутри которых должен находиться фронт пламени, чтобы самовозбуждение оказалось возможным

возбужденной гармоники. Чтобы рассмотреть этот вопрос несколько подробнее, обратимся к рис. 103.

На рис. 103 приведены эпюры стоячих волн колебаний δp и δv для трех первых гармоник, причем эпюры δp и δv условно совмещены в одной плоскости. Как было только что показано, у закрытого конца (при $x=0$) условия возбуждения выполняются всегда, т. е. для всех гармоник. Из предыдущего ясно, что в конечном итоге вопрос

о возможности возбуждения сводится к вопросу о соотношении между фазами давления и ускорения; если положительному δp_1 соответствует положительное δb , то колебательная система способна возбудиться. Рассмотрим с этой точки зрения вторую гармонику (средняя диаграмма на рис. 103). В окрестности $x=0$ условия возбуждения выполняются, при переходе эюры δp через нуль они нарушаются. Действительно, при этом δp меняет знак, т. е. меняет фазу на π , в то время как фаза δb сохраняется [из формулы (49.17) видно, что изменение фазы δb возможно только при изменении фазы $(\delta v_1)_0$, а эюра δv на рис. 103 говорит, что при переходе через сечение, соответствующее $\delta p = 0$, фаза δv остается прежней]. Следовательно, если на участке, прилегающем к закрытому концу трубы, фазы δp и δb совпадали, то в окрестности, лежащей правее сечения, где $\delta p = 0$, они оказываются сдвинутыми на π . Это означает, что δp и $\delta U_{\text{сгор}}$ находятся в противофазе и акустические колебания будут демпфироваться.

Дальнейшее движение в положительном направлении оси x приводит в сечение, где меняет знак (т. е. изменяет фазу на π) возмущение δv . Что касается фазы δp , то она остается прежней. Таким образом, справа от узла δv фазы δp и δb будут опять такими, что возбуждение акустических колебаний станет возможным. Следовательно, если первая гармоника, изображенная в верхней части рис. 103, допускала возбуждение системы при любом положении фронта пламени внутри трубы, то для второй гармоники существуют две области, в которых возможно возбуждение — одна лежит в окрестности закрытого, другая в окрестности открытого конца трубы.

В нижней части рис. 103 построены эюры стоячих волн δp и δv для третьей гармоники. Относительно при веденных эюр можно провести точно такие же рассуждения, которые показывают, что для третьей гармоники существует три участка, внутри которых обеспечиваются условия возбуждения, и два участка, где этих условий нет. Интервалы значений x , внутри которых должен находиться фронт пламени, чтобы появилась возможность возбуждения акустических колебаний, обозначены на рис. 103 через Δx .

Полученный здесь на основе теоретического рассуждения результат хорошо совпадает с экспериментом. Для примера на рис. 104 даны результаты опытов Коварда, Хартвелла и Джорджсона, уже приводившиеся на рис. 49 и рис. 50. Наряду с опытными точками на диаграммы нанесены зоны Δx , построенные следующим образом. Так как холодная смесь в рассматриваемых опытах была

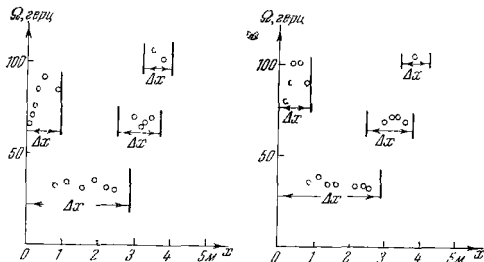


Рис. 104. Сравнение с экспериментом найденных теоретических интервалов Δx , внутри которых должен находиться фронт пламени, чтобы самовозбуждение оказалось возможным.

неподвижна, то четверть длины стоячей волны возмущений давления и скорости равна $\frac{a_1}{4\Omega}$ (a_1 — скорость звука в холодном газе, Ω — частота колебаний в герцах). Первая четверть волны, отсчитываемая от закрытого конца (от начала координат на рисунке), считалась зоной, где возбуждение возможно, а затем аналогичные области появлялись через одну (рис. 103). Частота колебаний Ω , которая подставлялась в приведенное несколько выше выражение, бралась из опыта.

Как видно из рис. 104, возбуждение акустических колебаний происходило только тогда, когда фронт пламени находился внутри зон Δx ¹⁾. Это является хорошим

¹⁾ Может вызвать недоумение то, что для первой гармоники интервал Δx не простирается до открытого конца трубы. Однако это вполне закономерно. При построении областей Δx на рис. 104

подтверждением сделанного в начале настоящего параграфа предположения, что основным механизмом обратной связи является взаимодействие акустических колебаний с волнообразованием на фронте пламени и воздействии этого волнообразования на эффективную скорость распространения пламени.

Рис. 104 дает повод сделать еще несколько замечаний по вопросу о механизме возбуждения колебаний. Прежде всего следует указать на то, что концы участков Δx соответствуют: левый — узлу скорости, правый — узлу давления. Поэтому на концах участков Δx система не может возбуждаться. То, что в узле давления возбуждения нет, видно из правой диаграммы на рис. 30 (следует лишь помнить, что на этой диаграмме амплитуда возмущения δv отложена кверху, а следовательно $\delta U_{\text{гор}}$ будет направлено по оси абсцисс). При повороте $\delta U_{\text{гор}}$ на угол $\frac{\pi}{2}$ относительно δv , диаграмма границ устойчивости не дает в этом случае попадания конца вектора $\delta U_{\text{гор}}$ в область неустойчивости. В окрестности узла скорости колебательная система не возбуждается потому, что вместе с уменьшением амплитуды колебаний скорости уменьшается (при заданной частоте) и величина амплитуды смещений среды h_0 , входящая в выражение для m^2 [см. формулу (49.3)]. Если считать, что длина волны на фронте пламени λ сохраняет порядок своей величины неизменной, то вблизи узлов скорости $m^2 \approx 0$. В то же время выше было показано, что возбуждение волнообразования на фронте пламени возможно лишь при $m^2 > 1,39$. Следовательно, не только при положении фронта

расчет велся для заданных экспериментальных частот по холодному газу, так как для оценки колебаний δp и δv перед фронтом пламени незначителен характер колебаний в горячей части трубы. Поэтому правый конец области Δx для первой гармонки лежит там, где располагался бы узел давления в том случае, когда вся труба была бы заполнена холодным газом, а колебания происходили с наблюдаемой частотой. Фактически характер колебаний горячих газов справа от опытной точки (который здесь интереса не представляет) совершенно иной, так как там располагается горячий газ, кроме того, при переходе через фронт пламени параметры колебаний тоже меняются, так что фактически узел давления расположен, конечно, у открытого конца трубы.

пламени в непосредственной близости от узла скорости, но и при удалении пламени на известное расстояние от этого узла колебательная система возбуждаться не будет.

Опытные точки ложатся, в полном соответствии со сказанным, внутри интервалов $\Delta\lambda$, причем тенденция к смещению опытных точек к правым концам интервалов $\Delta\lambda$ указывает на то, что для возбуждения колебаний более существенным является возмущение скорости, а не возмущение давления. Особенно показательны в этом смысле опытные точки, соответствующие положению фронта пламени непосредственно у закрытого конца. В этот момент колебания происходят с частотой второй гармоники, причем по мере приближения фронта пламени к закрытому концу трубы процесс колебаний начинает явно нарушаться. Внешне это проявляется в исчезновении регулярности, быстром падении частот колебаний.

Если бы механизм обратной связи был обусловлен какими-то физическими процессами, зависящими от давления (например, изменение периода в функции давления и т. п.), то по мере приближения пламени к закрытому концу никаких нарушений процесса колебаний не наблюдалось бы. Наблюдаемые отклонения от ожидаемого характера явления становятся понятными, если в основе механизма обратной связи лежит «таскание» фронта пламени колеблющейся средой. Тогда близость закрытого конца трубы должна резко нарушить всю гидромеханику такого «таскания» и вызвать отклонения от теоретической картины.

Выше, в §§ 28 и 29, рассматривался вопрос о скачкообразном изменении частот колебаний при непрерывном изменении длины горячей части трубы. Там соответствующие результаты были получены на основании формальных соображений и никак не были связаны с конкретным механизмом возбуждения колебаний. Анализ конкретного явления, произведенного здесь, приводит к той же закономерности, но теперь становится понятной внутренняя сущность этого явления. Если рассматривать постепенное движение фронта пламени от открытого конца трубы (абсцисса, равная 5 м на рис. 104), то первоначально (как это следует из схемы на рис. 103) будут неустойчивы все гармоники (здесь не учитываются

потери). Однако колебательная система начинает возбуждаться не с первой, а с наибольшей возможной (с учетом потерь) гармоник. Это происходит потому, что для более высоких частот необходимое для самовозбуждения удаление от расположенного у открытого конца трубы узла δv происходит раньше, чем для более низких гармоник. Как только в результате движения фронта пламени к закрытому концу трубы амплитуда колебаний скорости δv уменьшится (вследствие приближения фронта пламени к узлу δv) до соответствующей величины, происходит «перескок» на соседнюю гармонику, для которой узел δv расположен на более далеком расстоянии от открытого конца. С этой точки зрения становится понятным и повторный переход на колебания с частотой второй гармоники у закрытого конца трубы. Он происходит тогда, когда переход на вторую гармонику «удаляет» фронт пламени от узла δv (совпадающего с закрытым концом трубы), причем это удаление надо понимать как смещение относительно энтуры стоячей волны: в то время как самые левые экспериментальные точки, соответствующие основному тону, лежат на расстоянии $\sim \frac{1}{3}$

четверти длины стоячей волны от узла скорости, для второй гармоники на том же расстоянии от закрытого конца укладывается четверть длины волны целиком, т. е. фронт пламени оказывается в пучности δv .

Конкретный анализ рассматриваемого эксперимента делает понятным и то, почему экспериментальные точки на рис. 50 лучше совпадают с теоретическими областями неустойчивости, чем точки на рис. 49. В § 29 по этому поводу можно было утверждать только то, что характеры возмущенного процесса горения в момент наступления неустойчивости и в момент ее исчезновения не вполне одинаковы. Теперь это общее замечание может быть конкретизировано: наступление неустойчивости связано с удалением от узла давления, в то время как ее исчезновение обусловлено приближением к узлу скорости. Эти внешние причины имеют более глубокое физическое содержание. В момент наступления неустойчивости волнообразование на поверхности пламени может легко возникнуть, лимитирующим является то, что вследствие

близости фронта пламени к узлу давления отличное от нуля $\delta U_{\text{сгор}}$ не может дать положительного притока акустической энергии. В момент исчезновения неустойчивости фронт пламени приближается к пучности давления, условия получения положительного притока акустической энергии весьма благоприятны, но вследствие уменьшения $|\delta v|$ прекращает функционирование механизм обратной связи (прекращается волнообразование на фронте пламени). Из сказанного становится ясным, что причины начала и конца неустойчивости совершенно различны; поэтому совпадения теоретических и экспериментальных границ исчезновения неустойчивости на рис. 49 и не должно было получиться.

Полученные в §§ 28 и 29 результаты имеют преимущество большой общности, поскольку они не зависят от конкретного типа вибрационного горения. Но будучи весьма общими, эти результаты не могут объяснять многих частных особенностей наблюдаемого явления. Не следует также забывать, что выводы § 28 основаны на предположении, что область неустойчивости существует. Выводы настоящего параграфа, в этом отношении, более полны, они говорят, что для рассматриваемого режима горения область неустойчивости должна существовать.

В заключение полезно еще раз вернуться к рассмотрению экспериментальных данных, чтобы проанализировать их с точки зрения генерирования акустической энергии в зоне теплоподвода.

Поскольку при вибрационном горении рассматриваемого типа основным является возмущение эффективной скорости распространения пламени, условие на поверхности разрыва Σ , представляющей область теплоподвода, надо написать в виде системы (16.12). С учетом равенств (15.9) и (15.10), а также в предположении, что средняя скорость перемещения фронта пламени по трубе весьма мала, а следовательно M_1 и M_2 близки к нулю, систему трех уравнений (16.12) легко привести к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} v_2 &= \frac{1}{n} \bar{v}_1 + \left(\frac{1}{n} - n \right) \bar{v}_1, \\ \bar{p}_2 &= \bar{p}_1. \end{aligned} \right\} \quad (49.20)$$

Вместо трех уравнений (16.12) получены два уравнения (49.20), потому что первое и третье уравнения (16.12) после введения предположения $M_1 = M_2 = 0$ совпали.

Суммарный поток акустической энергии, излучаемой зоной теплоподвода, можно определить по равенству (19.7), положив в нем $m = 1$. Тогда с учетом условий (49.20) и заметив, что $\bar{p}_1 \bar{v}_1 = 0$, получим

$$\bar{A}_z = \frac{1}{2} (1 - n^2) \bar{p}_1 \bar{U}_1. \quad (49.21)$$

Как уже указывалось, δU_1 и $\delta U_{\text{сгор}}$ отличаются только знаками. Следовательно, переходя к безразмерным переменным, можно написать

$$\bar{U}_1 = - \frac{\delta U_{\text{сгор}}}{a_1}.$$

Если учесть равенства (49.19) и положить, что для участка типа *b* на рис. 96, который соответствует течению, прилегающему к закрытому концу,

$$\delta p_1 = (\delta p_1)_0 \sin \omega t,$$

то можно утверждать, что

$$\bar{U}_1 = \frac{U_{\text{n. cr}} (\delta \bar{S})_0}{a_1 |\rho_1|} \bar{p}_1.$$

Подставим найденное значение $\bar{U}_1$ в (49.21). Тогда

$$\bar{A}_z = \frac{1}{2} (n^2 - 1) \frac{U_{\text{n. cr}}}{a_1} (\delta \bar{S})_0 \bar{p}_1. \quad (49.22)$$

Для участков типа *a* на рис. 96 знак $\bar{A}_z$ будет противоположным тому, который дает формула (49.22). Поскольку $n > 1$, система будет возбуждаться лишь на участках типа *b*.

Полученная здесь формула (49.22) является аналитической записью того факта, который уже подвергался обсуждению несколько выше — возбуждение вибрационного горения (т. е. получение положительной секундной работы $\bar{A}_z$) связано как с наличием отличного от нуля возмущения давления $\bar{p}_1$, так и отличного от нуля волнообразования на поверхности пламени $(\delta \bar{S})_0$. Если раньше

это заключение основывалось на чисто качественных соображениях о типичных конфигурациях границ устойчивости, то теперь оно приобрело количественный характер, указывающий на то, что оба эти фактора играют одинаково важную роль. Следует напомнить, что при выводе формулы (49.22) уже были приняты должные фазовые соотношения, поэтому они не вошли в окончательное выражение для $\bar{A}_x$.

Для того чтобы стало возможным волнообразование на поверхности пламени, как уже говорилось, параметр m^2 должен быть больше 1,4, но меньше 9. Если обратиться к выражению для m^2 (49.3), то после перехода от h_0 к $(\delta v_1)_0 = h_0 \omega$ получим условие волнообразования в виде неравенства

$$1,4 < 16 \frac{(q_1 - q_2) (\delta v_1)_0}{(q_1 + q_2) \omega \lambda} < 9, \quad (49.23)$$

из которого следует, что колебания скорости δv должны превосходить некоторый предел. Поэтому $(\delta S)_0$, отличное от нуля, может существовать лишь в известном удалении от узла скорости. Надо заметить, что более точная численная оценка этого обстоятельства по результатам эксперимента затруднительна, поскольку в нем не было получено данных о длине волны на поверхности пламени λ .

Вторым затруднением при анализе выражения (49.22) является то, что входящая в него сомножителем величина $(\delta \bar{S})_0$ не определяется параметрами акустических колебаний. Если условие (49.23) выполнено, то при постоянных колебаниях среды [постоянном $(\delta v_1)_0$] величина $(\delta \bar{S})_0$ может изменяться со временем. В § 38 это обстоятельство уже подчеркивалось, и там указывалось, что такое свойство волнообразования связано с тем, что образование волн на поверхности раздела является параметрическим резонансом. Поэтому хотя по мере отхода фронта пламени от узла давления (перемещения справа налево внутри интервалов Δx на рис. 104) амплитуда $(\delta v_1)_0$ будет монотонно уменьшаться, амплитуда $(\delta \bar{S})_0$, характеризующая волнообразование, может возрастать. Следовательно, и произведение $(\delta \bar{S})_0 |p_{11}|$, входящее

в формулу (49.22), может увеличиваться не только за счет возрастания $|p_1|$, но и за счет возрастания $(\delta S)_0$. Увеличение $\bar{A}_x$ по мере удаления фронта пламени от узла давления будет приводить к тому, что амплитуды акустических колебаний станут возрастать. Это возрастание общего уровня колебаний будет в свою очередь воздействовать на величину m^2 , так что изменение амплитуд колебаний по мере перемещения фронта пламени по длине трубы не будет столь закономерным, как изменение частот.

§ 50. Возникновение колебаний в пылеугольных топках

По мере форсирования различного рода промышленных топок становятся все более вероятным возбуждение в них колебаний, связанных с вибрационным горением. Как уже говорилось во введении, в некоторых случаях эти колебания являются полезными и конструктор стремится вызвать их соответствующими мерами. В других случаях возникновение вибрационного горения крайне нежелательно и появление таких режимов при работе топки вызывает повреждения конструкции, преждевременный выход из строя отдельных устройств и т. п.

В последнее время В. В. Соловьев наблюдал и описал вибрационное горение в топке, работавшей на пыли каменных и бурых углей¹⁾, причем эти колебания были локализованы в предтопке, который будет ниже называться камерой сгорания. В. В. Соловьев указывает, что при эксплуатации высоконапряженных камер сгорания возникали вибрации, сопровождавшиеся сильным шумом и значительными колебаниями давления. Описываемые ниже опыты были поставлены упомянутым автором.

На рис. 105 дано схематическое изображение одной из камер сгорания, на которой были поставлены описанные ниже опыты. Камера сгорания представляет собою вертикально расположенный цилиндр диаметром 2 м, с поворотом на 90° в нижней части. С точки зрения

¹⁾ Соловьев В. В., К вопросу вибрационного горения в высоконапряженных топочных камерах. Инженерно-физический журнал, № 4, 1959 г.

акустики такую камеру сгорания можно считать трубой с одним закрытым (вверху) и одним открытым (внизу) концом, причем длину такой трубы надо будет считать

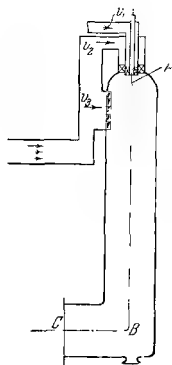


Рис. 105. Схематическое изображение камеры сгорания.

по ломаной оси ABC . Если оценить таким образом длину трубы, то она равна 12,5 м. В верхней части камеры сгорания расположена горелка, состоящая из двух патрубков. Внутренний патрубок, снабженный на выходе лопатками, служит для подачи угольной пыли и первичного воздуха. На рис. 105 подача воздуха и пыли показана стрелкой v_1 . Наружный патрубок, служащий для подачи вторичного воздуха, тоже снабжен лопатками. На рис. 105 вторичному воздуху соответствует стрелка v_2 . Кроме этого, необходимый для сгорания воздух подается по периферии, тангенциально, через соответствующим образом поставленные сопла (v_3 на рис. 105). Взаимодействие всех этих устройств приводит к закручиванию факела, способствующему лучшему сгоранию. Хотя, как видно из описания, в

верхней части камеры сгорания имеется ряд отверстий, в первом приближении этот конец можно считать «закрытым», так как суммарная площадь этих отверстий и общий характер их загромождения делает их на порядок менее эффективными, чем отверстие в сечении C в нижней части камеры сгорания. Что касается нижнего конца камеры, то существенным является то обстоятельство, что слева от сечения C расположен большой объем, который значительно превышает объем камеры сгорания; это и позволяет считать сечение C открытым концом трубы, сообщаемым с бесконечным пространством.

Сравнительно малое отношение длины трубы L к ее диаметру d ($\frac{L}{d} = 6,25$) указывает на то, что камера

сгорания будет характеризоваться относительно большими потерями на излучение (см. гл. VI), и поэтому в ней вероятно возбуждение колебаний только основного тона (первой гармоники). Чтобы оценить эти частоты, примем простейшую формулу, основанную на том, что первая гармоника в трубе с одним закрытым и одним открытым концом соответствует расположению в ней четверти длины волны возмущений

$$\Omega = \frac{a}{4L},$$

где Ω — частота в герцах, a — скорость звука.

При наблюдавшихся в опытах средних значениях температуры, а следовательно и скорости звука, частота, рассчитанная по приведенной формуле, оказалась равной 16,9 герц, в то время как измерения давали при режимах вибрационного горения величины, лежащие в диапазоне 16,1—17,2 герц.

На другой точке, конструктивно подобной описанной выше, которая характеризовалась $L=7$ м; d 1,4 м, подсчитанная частота оказалась равной 28 герц, а измеренная в опыте 25 герц. Снятые при вибрационном горении осциллограммы показывают почти точно синусоидальное изменение давления у закрытого конца трубы. Пример такой осциллограммы приведен на рис. 106. Хотя совпадение расчетных и опытных частот вселяет почти полную уверенность в том, что наблюдавшиеся колебания имеют акустическую природу, был поставлен дополнительный эксперимент, окончательно подтвердивший это предположение. Эксперимент заключался в снятии эюры стоячей волны колебаний, возникшей в камере сгорания.

Поместив у закрытого конца трубы начало отсчета координат, получим краевое условие $v=0$ ($\xi=0$). Другим словом, очевидно, будет $p=0$ ($\xi=1$). Не рассматривая

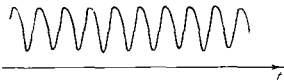


Рис. 106. Осциллограмма давления у горелки (в верхней части камеры сгорания).

пока процесса горения, вычислим эюру стоячей волны давления в такой трубе.

По уравнениям (4.13) и (4.14), обозначив $A_p = \bar{p}_0$, найдем

$$p = \bar{p}_0 \frac{1}{2} \left[\exp \left(-\frac{i}{M+1} \omega \xi \right) + \exp \left(-\frac{i}{M-1} \omega \xi \right) \right].$$

Здесь уже положено $\beta = i\omega$. Переход от размерных переменных к безразмерным осуществляется обычным

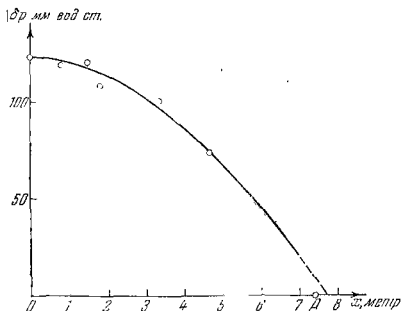


Рис. 107. Сравнение теоретической кривой (сплошная линия) и опытных точек распределения амплитуд колебаний по длине камеры сгорания.

образом, по формулам (4.8). Если произвести соответствующий расчет, причем амплитуду колебаний давления у закрытого конца взять из эксперимента, и из эксперимента же заимствовать частоту колебаний, то можно сравнить теоретическую и наблюдаемую конфигурации эюры давления. Такое сравнение дано на рис. 107. Как видно из графика, экспериментальные точки хорошо ложатся на теоретическую кривую. Обращает на себя внимание лишь некоторое несоответствие между теоретическим краевым условием у открытого конца ($\delta p = 0$) и ходом кривой. Это объясняется тем, что реальная колебательная

система безусловно излучала акустическую энергию из открытого конца (а следовательно, не могла иметь узла давления) и, кроме того, уже упоминавшимся в конце § 30 «эффектом открытого конца». Если добавить для учета этого эффекта к длине трубы у ее открытого конца величину порядка 0,3 диаметра, то на рис. 107 это даст точку А. Тогда продолжение расчетной кривой, определенной по замеренной частоте и амплитуде колебаний давления у закрытого конца, показанное на графике штрихами, пройдет совсем близко от точки А. Следовательно, не только величина частоты колебаний, но также существование и конфигурация стоячей волны давления подтверждает, что наблюдаемое явление имеет акустическую природу.

При анализе описываемого процесса надо учесть, что горение происходит у закрытого конца, т. е. в сечениях, где наблюдаются большие амплитуды колебаний давления и сравнительно малые колебания скорости течения. Если акустические колебания приводят, в результате действия некоторого механизма обратной связи, к колебаниям тепловыделения, то диаграмма границ устойчивости будет иметь характер, представленный в левой части рис. 28. Вектор Y , показанный на этой диаграмме, будет в рассматриваемом случае представлять колебательную составляющую тепловыделения (напомним, что на диаграммах изображенного типа вектор колебания давления направляется по оси x , а вектор колебания скорости по оси y). Если в системе существует механизм обратной связи, обуславливающий появление колебательной составляющей у тепловыделения, то, чтобы такое возмущение тепловыделения было способно возбудить акустические колебания, необходимо, чтобы относительная величина этого возмущения превосходила некоторую минимальную величину (окружность границы устойчивости не касается оси y) и, кроме того, была приблизительно в фазе с давлением (упомянутая окружность лежит в области положительных значений x симметрично относительно этой оси).

Первое из названных условий реализуется сравнительно легко; осуществление второго не так просто. Чтобы рассмотреть этот вопрос более подробно, обратимся

к изучению возможного механизма обратной связи. Выше, в § 35, уже говорилось, что вследствие сравнительно малого напора, под которым подается первичный воздух с пылью и вторичный воздух, колебания давления в верхней части камеры сгорания могут вызывать периодические колебания в подаче горючего и воздуха. Это дает возможность реализоваться механизму обратной связи, имеющему в основе смесеобразование.

Пыль подавалась в камеру сгорания первичным воздухом под давлением 200—250 мм вод. ст., а остальной воздух — под давлением 100—150 мм вод. ст. Как видно из рис. 107, колебания давления у закрытого конца трубы (у горелки) имели порядок 125 мм вод. ст. Следовательно, в моменты наибольшего повышения давления подача воздуха должна была почти полностью прекращаться, а подача пыли тормозиться заметным образом. Если предположить, что сгорание топлива происходит мгновенно, сразу после попадания его в камеру сгорания, то повышению давления в камере будет соответствовать уменьшение теплоподвода. Следовательно, возбуждение колебаний оказывается невозможным. В описанной схеме явления не учтено чрезвычайно важное обстоятельство: поскольку топливо воспламеняется не мгновенно, фазовое соотношение между колебаниями давления и тепловыделения может измениться. Кроме того, возможен фазовый сдвиг между возмущением давления и подачей топлива вследствие отклонения колебаний подачи пыли от квазистационарной схемы, принятой в приведенном простейшем рассуждении.

Задержка воспламенения смеси воздуха с пылью может быть связана с целым рядом факторов. Во-первых, следует учесть, что для воспламенения угольную пыль следует подогреть до соответствующей температуры. Этот нагрев происходит как за счет излучения тепла зоной горения (т. е. с первого мгновенного поступления пыли в камеру сгорания), так и за счет контакта с продуктами сгорания (это требует известного времени, так как зона интенсивного горения лежит на некотором удалении от горелки и пыль должна долетать до нее). Во вторых, нагрев пыли сам по себе недостаточен, если пылинки не окружены воздухом, основные массы которого, как это

видно из схематического чертежа камеры сгорания на рис. 105, поступают независимо от пыли. Следовательно, горению должен предшествовать процесс перемешивания пыли с воздухом, который тоже требует известного времени. Данное здесь качественное описание процесса воспламенения пыли показывает, что задержка воспламенения является совершенно неизбежной и ее величина не может быть пренебрежимо малой. Это может, при известных условиях, привести к совпадению фаз колебаний давления и тепловыделения, т. е. к самовозбуждению системы.

При обсуждении в конце гл. IX влияния «растянутости» зоны горения на вероятность самовозбуждения акустических колебаний было установлено, что чем более протяжена (в направлении оси трубы) зона горения, тем менее вероятно возбуждение колебаний. Следовательно, фактором, способствующим возникновению акустических колебаний, является сравнительно узкая локализация зоны интенсивного горения: процесс сгорания должен происходить бурно в довольно узком фронте горения. В рассматриваемом случае фактором, способствующим интенсивному тепловыделению вверху камеры сгорания, является, в частности, превышение напора, под которым подается пыль, по сравнению с напором, под которым подается остальной воздух. Тогда после прохождения давления через максимум первой в камеру сгорания устремляется пыль, она начинает подогреваться и газифицироваться и уже подготовленная для воспламенения смешивается с остальным воздухом. Это должно сопровождаться бурной реакцией в сравнительно узкой (по длине трубы) зоне.

Укорочение зоны интенсивного теплоподвода будет происходить также при использовании горючих, богатых «летучими» — газообразными веществами, выделяющимися при нагреве топлива и представляющими легко воспламеняющуюся часть топлива. Основная масса «летучих», а также мелкие фракции пыли должны сгорать в сравнительно короткой зоне, в малом отдалении от горелки. Поэтому использование быстро воспламеняющихся горючих также должно способствовать возможности возникновения вибрационного горения.

Задержка воспламенения и возможность сравнительно узкой локализации процесса горения фактически наблюдалась в пылеугольных топках. В. В. Соловьевым был поставлен специальный опыт по определению фазового сдвига между колебаниями давления и тепловыделения, который фактически получался при вибрационном горении в пылеугольной топке. С этой целью вверху, в зоне



Рис. 108. Осциллограмма одновременной записи колебаний давления и светимости (запись амплитуды колебаний давления искажена в нижних частях осциллограммы выходом датчика давления из области линейности).

расположения горелки (т. е. там, где было локализовано наиболее интенсивное горение), устанавливался фотоэлемент, реагирующий на свечение пламени. Если сделать предположение, что моменты наиболее интенсивного горения (тепловыделения) совпадают с моментами наиболее интенсивного свечения, то по колебанию последнего можно составить представление и об изменении тепловыделения в зоне интенсивного горения. При этом проще всего будет зафиксировать фазовые соотношения. На рис. 108 дан результат такой записи. Как видно из приведенной осциллограммы, фазы свечения и давления совпадают, что указывает на реализацию наиболее благоприятного для возбуждения колебательной системы фазового соотношения между указанными величинами.

Реализованное колебательной системой должное фазовое соответствие может быть объяснено, как уже указывалось, лишь тем, что процесс смесеобразования и воспламенения требует известного времени. Особый интерес представляет, однако, то обстоятельство, что записанные осциллографом кривые указывают на реализацию не

просто одного из необходимых фазовых соотношений, но на реализацию того единственного соотношения, которое обеспечивает наиболее благоприятные условия возбуждения. Как уже было показано в § 45, совпадение фазы тепловыделения и давления является оптимальным с этой точки зрения. Таким образом, приведенный экспериментальный факт можно рассматривать как одно из подтверждений гипотезы о стремлении колебательной системы к реализации такого процесса, который характеризуется максимумом излучения акустической энергии из зоны теплоподвода.

§ 51. Вибрационное горение в прямоточных воздушно-реактивных двигателях

Среди различных типов реактивных двигателей, используемых современной техникой, определенную область применения имеют прямоточные воздушно-реактивные двигатели. Схематически такой двигатель изображен на рис. 109. Отличительными особенностями этих

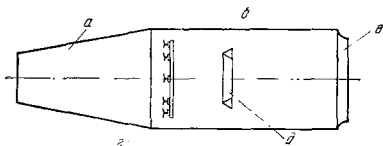


Рис 109. Схема прямоточного воздушно-реактивного двигателя.

двигателей надо считать следующие: во-первых, для сжигания горючего используется воздух, а во-вторых, давление этого воздуха не повышается в различного рода компрессорах, имеющих механический привод. При движении прямоточного двигателя в воздухе (справа налево на рис. 109) встречный воздух попадает в диффузор *а*, где происходит торможение воздуха и связанное с этим повышение давления. За диффузором расположена камера сгорания *б*, которая заканчивается выходным соплом *в*.

Внутри камеры сгорания помещается коллектор форсунок ε для ввода горючего в воздух и стабилизатор пламени δ . Как видно из этого краткого описания, идеализированная схема прямооточного воздушно-реактивного двигателя может быть представлена в качестве трубы, внутри которой, главным образом в зоне расположения стабилизатора δ , происходит интенсивное горение. Более подробное описание конструкции, принципов работы и других

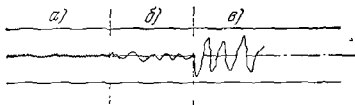


Рис. 110. Типичные осциллограммы давления в прямооточном воздушно-реактивном двигателе (а — нормальное, б — жесткое, в — пульсационное горение).

характеристик подобных двигателей можно найти в специальных руководствах, например книге М. М. Бондарюка и С. М. Ильяшенко¹⁾.

Названные авторы указывают в своей книге, что при испытании прямооточных двигателей иногда наблюдаются колебания, имеющие акустическую частоту, характерную для двигателя в целом.

Неизбежные при техническом сжигании топлива малые и нерегулярные колебания давления и скорости принято не выделять и такой процесс называть спокойным горением. Если же амплитуды колебаний давления возрастают в несколько раз, но остаются существенно меньше среднего избыточного давления в камере, а частота становится регулярной, то горение принято называть «жестким». Если колебания давления достигают порядка среднего избыточного давления в камере сгорания при регулярном характере этих колебаний, то горение называют пульсационным. М. М. Бондарюк и С. М. Ильяшенко приводят типичные осциллограммы давления для этих случаев (а, б и в на рис. 110) и указывают, что жесткое и

¹⁾ Бондарюк М. М. и Ильяшенко С. М., Прямоточные воздушно-реактивные двигатели, Оборонгиз, Москва, 1958.

пульсационное давление недопустимы в двигателях, так как они могут привести к разрушению элементов его конструкции.

Очевидно, что в рассматриваемом случае наблюдается возбуждение акустических колебаний горением. Расположенная в области стабилизатора зона интенсивного теплоподвода может возбудить продольные акустические колебания газового столба между входным сечением диффузора и выходным сечением сопла. Как известно из предыдущих глав, для этого необходимо, чтобы фаза горения (включая в это понятие и теплоподвод, и перемещение фронта пламени) была определенным образом увязана с фазой колебаний газового столба. Кроме того, должен существовать некоторый механизм обратной связи, который возмущал бы процесс горения в ритме акустических колебаний.

В экспериментах, специально поставленных Фенном, Форни и Гармоном на модели камеры сгорания прямооточного воздушно-реактивного двигателя, для изучения колебательных процессов в них, было зарегистрировано несколько типов колебания¹⁾. Один из этих типов обязан своим существованием продольным акустическим колебаниям газового столба внутри тракта прямооточного двигателя. Авторы указанных экспериментов показали, что частота возникших колебаний в общем согласуется с частотой, определяемой по простейшей формуле типа формулы (5.4), причем имп наблюдалось возбуждение только основного тона.

Надо сказать, что эти опыты были интересны по той причине, что в них краевые условия на входе в камеру сгорания и на выходе из нее (камера включала не только зону горения за стабилизатором, но и большой участок течения от топливных форсунок до стабилизатора) были такими, какие характерны для сверхзвуковой скорости полета. В камеру сгорания с цилиндрическим участком подготовки смеси, расположенным перед стабилизатором пламени, специальным компрессором нагнетался воздух, так что давление внутри камеры доходило до 2,5 *атм*.

¹⁾ Fenn Y. B., Forney H., Garmon R., *Industrial and Engineering Chemistry* 43, № 7, 1951. Русский перевод в сборнике «Вопросы ракетной техники», № 4 (10), 1952.

В результате в выходном сопле реализовалась критическая скорость (т. е. достигалась местная скорость звука). На входе в трубу, в зоне расположения форсунок, проходные сечения для потока воздуха были столь малы, что с акустической точки зрения входное сечение трубы следовало считать «закрытым». Как уже говорилось выше (см., например, § 26), существование в некотором сечении трубы критической скорости приводит к тому, что колебания скорости в этом сечении становятся невозможными. Таким образом как во входном, так и в выходном сечении опытной установки краевые условия имели следующий вид: $v=0$. Эти краевые условия в некотором смысле противоположны тем, которые были реализованы в экспериментах по вибрационному горению, описанных в гл. V. Поскольку в описанных ранее опытах течение на входе и выходе из трубы было дозвуковым, в них реализовались краевые условия вида $\bar{p}=0$. Хотя теоретически переход от краевых условий вида $\bar{v}=0$ к краевым условиям вида $\bar{p}=0$ почти ничего не меняет (кроме распределения областей неустойчивости по длине трубы), экспериментальное подтверждение этого факта представляет несомненный интерес.

С точки зрения полученных ранее выводов становится понятным и тот факт, что в описываемых опытах возбуждался основной тон колебаний. Общая длина трубы, в которой ставились опыты, колебалась от 1525 мм до 1780 мм, а длина горячей части имела при этом порядок 350 мм, т. е. была относительно коротка. Казалось бы, в системе должна была возбудиться одна из высших гармоник. Действительно, в опытах, приведенных на рис. 50 и 51, при той же относительной длине горячей части, приблизительно равной 0,2, возбуждались 3-я и 4-я гармоники. Однако в опытах с критическим истечением краевое условие у выходного конца трубы имеет вид $\bar{v}=0$, а не $\bar{p}=0$, как это было в опытах, результаты которых приведены на рис. 50 и 51. Следовательно, окрестность открытого выходного конца была на этот раз окрестностью пучности, а не узла давления. Но тогда возбуждаемые частоты должны быть такими, какие свойственны трубам, в которых теплоподвод осуществляется вблизи

пучности давления. В обычных условиях, при обоих открытых концах трубы этому соответствует положение зоны теплоподвода в средней части трубы или, для трубы с одним закрытым концом, у закрытого конца. В обоих названных случаях, как это, в частности, следует и из рис. 50 и 51, должен возбуждаться основной тон (первая гармоника).

К сожалению, авторы описанных здесь опытов не рассмотрели вопроса о механизме обратной связи, который заставляет процесс горения возмущаться в ритме акустических колебаний. Чтобы привести пример одного из вероятных механизмов обратной связи в воздушно-реактивных двигателях, можно сослаться на мнение Никольсона и Радклиффа, изучавших аналогичные процессы в форсажных камерах турбореактивных двигателей¹⁾. Они объясняют возбуждение акустических колебаний возникновением переменного теплоподвода вследствие зависимости полноты сгорания от коэффициента избытка воздуха и от величины скорости потока перед зоной горения. Если согласиться с этой точкой зрения, то весь анализ вибрационного горения можно будет построить аналогично задаче, рассмотренной в § 23—25. Единственным отличием будут иные краевые условия, однако это не может оправдать повторения всех выкладок в настоящем параграфе.

§ 52. Продольные колебания в жидкостных реактивных двигателях

При работе жидкостного реактивного двигателя всегда наблюдаются колебания давления в камере сгорания, колебания в расходе топлива и т. п. Это приводит к колебаниям тяги, что воспринимается конструкцией, на которой установлен двигатель, как некоторая механическая вибрация. Надо сказать, что эти вибрации не представляют какой-либо опасности для конструкции, не снижают эффективности двигателя, и их следует считать столь же естественным явлением, как и вибрации и шум

¹⁾ Nicholson H. M., Radcliffe A., Pressure fluctuations in a jet engine. Brit. Journ. Appl. Phys., v. 4, N 12, 1953.

автомобильного двигателя. Однако было замечено, что при известных условиях нерегулярные колебания, о которых здесь шла речь, резко изменяют свой характер. Они значительно увеличивают свою амплитуду, становятся строго периодическими и тем самым становятся весьма опасными для конструкции двигателя. Поэтому требования успешного развития ракетной техники привели к необходимости подробного исследования автоколебаний в камерах сгорания жидкостных реактивных двигателей. Неудивительно, что в периодической литературе появился ряд статей, посвященных этой проблеме, а недавно была выпущена весьма ценная монография Крокко и Чжена¹⁾.

Авторы указанной монографии, в полном согласии с рядом других исследователей, выступавших со своими работами в периодических изданиях, различают два вида автоколебаний в жидкостных реактивных двигателях. Одни из этих видов принято называть низкочастотными автоколебаниями, другой — высокочастотными. Разница между ними сводится к следующему.

Низкочастотные колебания вызываются тем, что система, состоящая из камеры сгорания и топливоподающих устройств, становится неустойчивой по отношению к малым возмущениям. При этом механизм возникновения этой неустойчивости обусловлен влиянием периодических колебаний давления в камере сгорания на подачу топлива и на величину времени запаздывания воспламенения. Характерным для этого вида автоколебаний является то, что при их исследовании можно пренебрегать протяженностью камеры сгорания, рассматривая ее как некоторый объем, во всех сечениях которого давление изменяется одинаковым образом.

Высокочастотные колебания также вызываются тем, что система становится неустойчивой по отношению к малым возмущениям и в этом случае также определенную роль играет взаимодействие колебаний давления

¹⁾ Luigi Crocco and Sin-J Cheng, Theory of Combustion Instability in Liquid Propellant Rocket Motors. Butterworth scientific publications, 1956. Русский перевод: Лунджи Крокко и Чжен Сп-и, Теория неустойчивости горения в жидкостных реактивных двигателях, Изд-во иностр. литературы, Москва, 1958.

в камере сгорания с процессом подготовки и воспламенения горючей смеси. Однако, в отличие от предыдущего случая, здесь уже нельзя пренебрегать протяженностью камеры сгорания и нельзя считать, что во всех сечениях объема камеры сгорания давление и другие параметры изменяются одинаковым образом.

С точки зрения механики, первый случай во многом аналогичен обычным динамическим системам (описываемым обыкновенными дифференциальными уравнениями), а второй случай связан с распространением возмущений по сплошной среде, т. е.

с явлениями акустического типа (описываемыми системами дифференциальных уравнений в частных производных). Поскольку настоящая книга посвящена изучению процессов возбуждения продольных акустических колебаний, то естественно, что здесь будет рассматриваться только задача о продольных высокочастотных колебаниях. Хотя приводимое ниже изложение вопроса несколько отличается от того, которое дано в монографии Крокко и Чжена (это вызвано желанием быть более близким к содержанию предыдущих глав), основные идеи и результаты заимствованы из названной монографии. Желающим более подробно познакомиться и с низкочастотными колебаниями в жидкостных реактивных двигателях следует порекомендовать обратиться к работе Крокко и Чжена.

Прежде чем переходить к изложению вопроса, дадим краткое описание схемы жидкостного реактивного двигателя. Как известно, этот тип двигателя представляет собой цилиндрическую трубу a , с одной стороны которой устанавливается сверхзвуковое сопло b , а с другой — устройства для впрыска в камеру сгорания топлива (рис. 111). Последние включают, в частности, устройства для подачи и распыла горючего (трубопровод $г$ на рисунке)

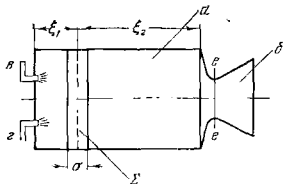


Рис. 111. Схема жидкостного реактивного двигателя.

и окислителя (трубопровод *в* на рисунке). В замкнутый объем камеры сгорания следует, как известно, непрерывно подавать горючее (например, спирт) и окислитель (например, жидкий кислород). В совокупности горючее и окислитель принято называть топливом. Топливо не всегда должно состоять из двух компонентов, как в только что рассмотренном примере. Существуют так называемые однокомпонентные топлива, способные к самовоспламенению при попадании в камеру сгорания двигателя. В этом случае вместо двух трубопроводов *в* и *г* на рис. 111 сохранится лишь один. Закрытый конец камеры сгорания, вместе с расположенными здесь форсунками, служащими для распыла топлива, принято называть головкой, противоположный конец — соплом.

Горение в двигателе сильнеешим образом зависит от тех процессов, которые происходят у головки двигателя. Поскольку в камеру сгорания впрыскиваются жидкие компоненты, постольку смесеобразование играет весьма важную роль. Эффективность и быстрота сгорания впрыснутого топлива зависят от качества распыла и смешения компонентов (если топливо не однокомпонентное), от быстроты испарения капелек топлива и от быстроты прогрева горючей смеси. Вся совокупность этих процессов требует для своего завершения известного времени, по прошествии которого только и может наступить интенсивная химическая реакция.

Не имея возможности дать этим процессам сколько-нибудь четкую количественную характеристику, введем в качестве некоторой суммарной характеристики время задерживания, понимая его как время, прошедшее от момента впрыска топлива до мгновенного превращения его в продукты сгорания.

Примем для периода индукции $t_{\text{и}}$ соотношение (37.5), которое говорит, что период индукции связан только с давлением. В § 37 указывалось, что многие стороны физико-химических процессов, подвергающихся идеализации путем введения периода индукции $t_{\text{и}}$, действительно связаны с давлением. Но соотношению (37.5) можно приписать более общее значение. Если в другие факторы (например, относительные скорости капелек топлива и продуктов сгорания) играют существенную роль, по

их изменение закономерно связано с изменением давления, то влияние указанных факторов можно, в конечном итоге, выразить через давление. При переходе к безразмерным переменным соотношение (37.5) примет следующий вид:

$$\int_{\tau-\tau_{\text{и}}}^{\tau} (1 + \bar{p})^r d\tau' = \text{const.} \quad (52.1)$$

Воспользуемся полученной формулой для записи условий на поверхности теплоподвода (сечение потока, в котором капли топлива мгновенно превращаются в продукты сгорания).

Предположим, что количество подаваемого в камеру сгорания топлива постоянно, т. е. никак не зависит от возможных колебаний давления внутри камеры сгорания (физически это соответствует очень большим давлениям подачи топлива).

Если секундный массовый расход топлива обозначить через m , а массу сгорающего в единицу времени топлива через $m_{\text{сг}}$, то относительное возмущение массовой скорости сгорания можно определить так:

$$\bar{m} = \frac{m_{\text{сг}} - m}{m}. \quad (52.2)$$

Если процесс сгорания топлива характеризуется периодом индукции $\tau_{\text{и}}$, то масса топлива, сгоревшая за время $d\tau$, должна быть равна массе топлива, вырынутой за время $d(\tau - \tau_{\text{и}})$

$$m_{\text{сг}} d\tau = m d(\tau - \tau_{\text{и}})$$

или

$$m_{\text{сг}} = m \left(1 - \frac{d\tau_{\text{и}}}{d\tau} \right). \quad (52.3)$$

Переходя к безразмерному возмущению $\bar{m}$, последнему равенству можно придать следующий вид:

$$\bar{m} = - \frac{d\tau_{\text{и}}}{d\tau}. \quad (52.4)$$

Найдем выражение производной $\frac{d\tau_n}{d\tau}$ через известные величины. Обратимся для этого к соотношению (52.1). Дифференцируя его по τ и предполагая, что $\bar{p}$ зависит только от переменной интегрирования τ' , но не зависит от мгновенного значения τ_n , получим искомую величину по правилу дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом.

Чтобы воспользоваться этим правилом, разобьем левую часть равенства (52.1) на два слагаемых:

$$\int_{\tau-\tau_n}^{\tau} (1+\bar{p})^r d\tau' = \int_a^{\tau} (1+\bar{p})^r d\tau' - \int_a^{\tau-\tau_n} (1+\bar{p})^r d\tau',$$

где a - некоторая произвольная постоянная. При дифференцировании по τ учтем, что τ_n является функцией τ и поэтому дифференцирование второго слагаемого следует вести по правилу дифференцирования сложной функции, умножив производную от этого интеграла по выражению, взятому в качестве верхнего предела интегрирования, на производную от этого выражения по τ . Итак:

$$\frac{d}{d\tau} \int_{\tau-\tau_n}^{\tau} (1+\bar{p})^r d\tau' = [1+\bar{p}(\tau)]^r - [1+\bar{p}(\tau-\tau_n)]^r \left(1 - \frac{d\tau_n}{d\tau}\right).$$

Поскольку равенство (52.1) имеет в правой части постоянную, полученное выражение равно нулю. Отсюда легко находится $\frac{d\tau_n}{d\tau}$

$$\frac{d\tau_n}{d\tau} = 1 - \left[\frac{1+\bar{p}(\tau)}{1+\bar{p}(\tau-\tau_n)} \right]^r.$$

Второе слагаемое полученного равенства можно упростить, так как $\bar{p} \ll 1$, а следовательно, и отклонение периода индукции от некоторого среднего за цикл значения $\tilde{\tau}_n$ вследствие колебания давления относительно невелики. Это позволяет написать, что

$$\left[\frac{1+\bar{p}(\tau)}{1+\bar{p}(\tau-\tau_n)} \right]^r \cong 1 + r [\bar{p} - \bar{p}(\tilde{\tau}_n)].$$

Здесь опущено обозначение зависимости $\bar{p}$ от τ , а выражение $p(\tilde{\tau}_n)$ указывает лишь, что величина $\bar{p}$ берется в некоторый момент, предшествующий постоянному на величину среднего периода индукции $\tilde{\tau}_n$. Таким образом,

$$\frac{d\tau_n}{d\tau} = -r[\dot{p} - p(\tilde{\tau}_n)]. \quad (52.5)$$

Сочетание полученного равенства с найденным выражением (52.4) дает соотношение, могущее служить основой для формулирования свойств области теплоподвода:

$$\bar{m} = r[\dot{p} - p(\tilde{\tau}_n)]. \quad (52.6)$$

Найденное соотношение следует использовать при написании уравнений, связывающих возмущенные параметры течения слева и справа от поверхности разрыва Σ , являющейся, как известно, идеализированной неподвижной плоскостью теплоподвода. Чтобы написать свойства поверхности Σ , используем зависимости, приведенные в гл. IV. Из сказанного выше ясно, что в уравнениях, описывающих процесс горения в жидкостных реактивных двигателях, не следует пренебрегать колебанием подачи газообразной массы в камеру сгорания, поскольку даже при постоянной подаче жидкого топлива сгорание (т. е. превращение в газ) может происходить с переменной скоростью. Пренебрегая объемом, занимаемым каплями топлива, можно считать, что моментом поступления массы в камеру сгорания является момент перехода топлива в газообразное состояние. Поэтому напомним уравнения для области горения σ в виде (15.5), не пренебрегая членом δM^* .

В рассматриваемом случае в уравнениях (15.5) можно сделать следующие упрощения. Будем считать, что в установившемся процессе температура газа как слева, так и справа от области σ (рис. 111) одинакова, т. е. $a_1 = a_2$. Это связано с тем, что и слева и справа от σ пространство камеры сгорания заполнено продуктами сгорания. Кроме того, слева от σ газ можно считать в среднем (в установившемся режиме) неподвижным и изэнтропичным, т. е. полагать $u_1 = 0$ и $\delta s_1 = 0$. Если учесть это, то, поделив первое уравнение (15.5) на $q_2 u_2$, второе

на $\varrho_2 v_2^3$, а третье на $\varrho_2 v_2^3$ и учтя, что $\varrho_2 v_2 = M^*$, можно получить следующую систему уравнений, записанных в припятых в настоящей книге безразмерных переменных:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{M} \dot{v}_2 + \dot{p}_2 - \dot{s}_2 &= \frac{1}{M} v_1 + \bar{m}, \\ 2v_2 + \left(M + \frac{1}{M} \right) \bar{p}_2 - Ms_2 - \frac{1}{M} \bar{p}_1 + M\bar{J}'_2, \\ \left(3M + \frac{2}{M(\kappa-1)} \right) v_2 + \left(M^2 + \frac{2\kappa}{\kappa-1} \right) p_2 - M^2 \bar{s}_2 &= \\ &= \frac{2}{M(\kappa-1)} \bar{v}_1 + 2M^2 \bar{J}_3 + 2M^2 \bar{Q}^*. \end{aligned} \right\} \quad (52.7)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} \bar{J}'_2 &= -\frac{1}{F\varrho_2 v_2^3} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \varrho v_x dV, \\ \bar{J}'_3 &= \frac{1}{F\varrho_2 v_2^3} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \varrho \frac{v^2}{2} dV, \\ \bar{Q}^* &= \frac{\delta Q^*}{\varrho_2 v_2^3}, \\ \bar{m} &= \frac{\delta M^*}{M^*}, \\ M &= \frac{v_2}{a_2}. \end{aligned} \right\} \quad (52.8)$$

Сравнивая систему (52.7) с полученной ранее системой (15.7), можно видеть значительное упрощение соотношений на Σ для жидкостного реактивного двигателя по сравнению с соотношениями, справедливыми для горения движущихся газов. Ряд упрощений связан с тем, что $v_1 = 0$, другие — с постоянством параметров газа в установившемся режиме для всей камеры сгорания. Последнее, в частности, приводит к тому, что $a_1 \cong a_2$, $\varrho_1 \cong \varrho_2$; $T_1 \cong T_2$, а это в свою очередь даст $\frac{\partial}{\partial t} \int_V \varrho dV \cong 0$ и

$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \varrho (c_v T + q) dV = 0$. Величину q можно положить равной нулю, так как вся газовая среда в камере состоит из продуктов сгорания (при такой идеализации не

учитывается наличие в камере сгорания газообразных компонентов топлива).

Введем дальнейшее упрощающее допущение. Примем, что пространственное распределение горения не изменяется при акустических колебаниях. Тогда $J'_2 = 0$ и $\bar{J}'_3 = 0$. Кроме того, учтем, что тепло, подводимое непосредственно в зону σ , однозначно связано с подводом массы

$$Q^* = Q_M \cdot M^*$$

или

$$Q^* = Q_V \bar{m}; \quad \left(Q_V = \frac{Q_M}{v^{\frac{2}{3}}} \right). \quad (52.9)$$

Тогда, исключая из системы (52.7) $\bar{s}_2$, можно получить свойства плоскости Σ в виде следующих двух равенств:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_2 + \frac{1}{M} \bar{p}_2 &= \bar{v}_1 + \frac{1}{M} \bar{p}_1 - M \bar{m}, \\ \left[M + \frac{1}{M(\kappa - 1)} \right] \bar{v}_2 + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \bar{p}_2 &= \\ &= \left[M(\kappa - 1) - \frac{M}{2} \right] \bar{v}_1 + M^2 \frac{2Q_V}{2} \frac{1}{2} \bar{m}. \end{aligned} \right\} \quad (52.10)$$

Если добавить к ним соотношение (52.6), причем полагать, что входящее в него $\bar{p}$ совпадает с $\bar{p}_1$ (это естественно, так как период индукции должен зависеть от параметров среды, через которую движутся капли топлива к области горения σ), то число переменных в системе (52.10) можно будет свести к четырем. Стоящая в правой части равенства (52.6) разность $\bar{p} - \bar{p}(\bar{\tau}_n)$ может быть выражена (см. (4.13)) следующим образом:

$$\bar{p} - \bar{p}(\bar{\tau}_n) = \bar{p}(1 - e^{-\beta \bar{\tau}_n}).$$

Окончательно форма записи свойств поверхности Σ для рассматриваемого случая будет выглядеть так:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_2 + \frac{1}{M} \bar{p}_2 &= -\bar{v}_1 + \left[\frac{1}{M} - Mr(1 - e^{-\beta \bar{\tau}_n}) \right] \bar{p}_1, \\ \left[M + \frac{1}{M(\kappa - 1)} \right] \bar{v}_2 + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \bar{p}_2 &= \\ &= \left[M(\kappa - 1) - \frac{M}{2} \right] \bar{v}_1 + M^2 \frac{2Q_V - 1}{2} r(1 - e^{-\beta \bar{\tau}_n}) \bar{p}_1. \end{aligned} \right\} \quad (52.11)$$

Теперь необходимо задать два краевых условия.

Одно из краевых условий получается сразу: у головки не может происходить колебаний скорости, т. е. (взяв начало отчета ξ на плоскости Σ)

$$\text{при } \xi = \xi_1 \quad v_1 = 0. \quad (52.12)$$

Чтобы сформулировать второе краевое условие, обратимся к рассмотрению характера течения у выходного сопла. Если считать, что у двигателя «короткое» сопло, т. е. расстояние от сечения, соответствующего $\xi = \xi_2$ на рис. 111 до критического сечения сопла (сечение ee) невелико по сравнению с длиной камеры сгорания $|\xi_1| + \xi_2$ (точнее, по сравнению с длиной стоячей волны возбужденных в камере сгорания колебаний), то в соответствии с проведенными выше для аналогичного случая рассуждениями (стр. 211)

$$\bar{v}_2 = 0 \quad \text{при } \xi = \xi_2. \quad (52.13)$$

Пусть теперь $\xi_1 = 0$, а $\xi_2 = 1$, т. е. будем рассматривать горение, происходящее в непосредственной близости от головки. Тогда в равенствах (52.11) можно будет принять $v_1 = 0$ и путем несложных преобразований привести их к виду:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_{20} &= (a_{12} + a_{13}r + a_{14}re^{-\beta\tilde{\tau}_u}) p_{10}, \\ \bar{p}_{20} &= (a_{22} + a_{23}r + a_{24}re^{-\beta\tilde{\tau}_u}) \bar{p}_{10}. \end{aligned} \right\} \quad (52.14)$$

Здесь a_{ik} — некоторые постоянные, которые определяются в процессе преобразования равенств (52.11) к виду (52.14). Индексы нуль при переменных поставлены для того, чтобы подчеркнуть, что они соответствуют $\xi = 0$.

Полученные соотношения почти буквально совпадают с рассматривавшимися ранее равенствами (26.4). Учтя, что краевое условие (52.13) совпадает с краевым условием, использованным в § 26, можно сразу, по аналогии с уравнением (26.5), написать следующее выражение, которое является характеристическим уравнением

рассматриваемой задачи:

$$(a_{12} + a_{13}r + a_{14}re^{-\beta\tilde{\tau}_n}) \left(1 + \exp \frac{2}{1-M^2}\beta\right) + \\ + (a_{22} + a_{23}r + a_{24}e^{-\beta\tilde{\tau}_n}) \left(1 - \exp \frac{2}{1-M^2}\beta\right) = 0. \quad (52.15)$$

Отсюда следует:

$$re^{-\beta\tilde{\tau}_n} = \\ = - \frac{(a_{12} + a_{13}r) \left(1 + \exp \frac{2}{1-M^2}\beta\right) + (a_{22} + a_{23}r) \left(1 - \exp \frac{2}{1-M^2}\beta\right)}{a_{14} \left(1 + \exp \frac{2}{1-M^2}\beta\right) + a_{24} \left(1 - \exp \frac{2}{1-M^2}\beta\right)} = \\ = A(r, \beta) + iB(r, \beta). \quad (52.16)$$

Здесь A и B — вещественная и мнимая части дроби, стоящей в средней части равенства.

Будем искать границу устойчивости. Как известно, на границе устойчивости $\beta = i\omega$ и, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} r \cos \omega\tilde{\tau}_n &= A(r, \omega), \\ r \sin \omega\tilde{\tau}_n &= -B(r, \omega), \end{aligned} \right\} \quad (52.17)$$

откуда находим

$$r^2 = A^2(r, \omega) + B^2(r, \omega). \quad (52.18)$$

Задаваясь разными ω , находим по уравнению (52.18) r , а затем по равенствам (52.17) $\tilde{\tau}_n$.

Фактическое выполнение указанных операций упрощается тем обстоятельством, что, как видно из системы (52.11), численные коэффициенты при r и при $re^{-\beta\tilde{\tau}_n}$ отличаются лишь знаками. Поэтому и относительно коэффициентов соответствующих слагаемых равенств (52.14) можно утверждать то же самое:

$$a_{14} = -a_{13}, \quad a_{24} = -a_{23}.$$

Но тогда равенству (52.16) (при $\beta = i\omega$) можно придать такой вид:

$$r \exp(-i\omega\tilde{\tau}_n) = r + b + ic, \quad (52.19)$$

где

$$b = \frac{a_1 a_2 - a_3 a_4}{a_2^2 + a_1^2}, \quad c = \frac{a_2 a_3 - a_1 a_4}{a_2^2 + a_1^2},$$

$$a_1 = (a_{12} + a_{22}) + (a_{12} - a_{22}) \cos \frac{2}{1-M^2} \omega,$$

$$a_2 = (a_{13} + a_{23}) + (a_{13} - a_{23}) \cos \frac{2}{1-M^2} \omega,$$

$$a_3 = (a_{12} - a_{22}) \sin \frac{2}{1-M^2} \omega,$$

$$a_4 = (a_{13} - a_{23}) \sin \frac{2}{1-M^2} \omega.$$

Переходя затем к уравнению типа (52.18), получим линейное относительно r соотношение

$$r = - \frac{b^2 + c^2}{2b}. \quad (52.20)$$

Определив по формуле (52.20) величину r , сразу находим $\tilde{\tau}_n$. Из сравнения мнимых и действительных частей равенства (52.19) следует:

$$\sin \omega \tilde{\tau}_n = - \frac{c}{r}, \quad \cos \omega \tilde{\tau}_n = 1 + \frac{b}{r}. \quad (52.21)$$

Для теоретического анализа высокочастотных колебаний в жидкостных реактивных двигателях систему уравнений (52.7), описывающую свойства области теплоподвода, обычно заменяют приближенной. Написав только первое уравнение, являющееся следствием закона сохранения потока массы, дополняют его двумя равенствами $\bar{p}_1 = \bar{p}_2$ и $\bar{s}_1 = \bar{s}_2 = 0$, которые используются вместо второго и третьего уравнений (52.7).

Физически это связано с тем, что продукты сгорания в камере жидкостного реактивного двигателя имеют в основном одинаковую температуру по обе стороны фронта горения. Это существенно отличает процесс в двигателях рассматриваемого типа от процессов в топках и других устройствах, в которых подвод тепла к потоку холодного газа, пересекающего фронт пламени, обычно происходит без заметного увеличения массы текущего газа.

Если признать это допущение, то вместо системы (52.7) можно будет написать такую:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{M} \bar{v}_2 + \bar{p}_2 &= \frac{1}{M} \bar{v}_1 + r(1 - e^{-\beta \tau_{11}}) \bar{p}_1, \\ \bar{p}_2 &= \bar{p}_1. \end{aligned} \right\} \quad (52.22)$$

Равенства (52.14) приобретают весьма простой вид:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_{20} &= \bar{v}_{10} + M[r(1 - e^{-\beta \tau_{11}}) - 1] \bar{p}_{10}, \\ \bar{p}_{20} &= \bar{p}_{10}, \end{aligned} \right\} \quad (52.23)$$

а коэффициенты уравнения (52.19) можно записать сразу в явном виде:

$$b = -1; \quad c = -\frac{\sin \frac{2}{1-M^2} \omega}{M \left(1 + \cos \frac{2}{1-M^2} \omega \right)}. \quad (52.24)$$

Прежде чем идти дальше, оценим допустимость введенного здесь упрощения. С этой целью построим область неустойчивости для основного тона трубы по обоим методам — точной и приближенной. Для этого возьмем следующий численный пример: $\kappa = 1,2$, $M = 0,213$, теплотворную способность топлива примем равной $2000 \frac{\text{ккал}}{\text{кг}}$.

Следует заметить, что для приближенной методики знание теплотворной способности топлива излишне.

Получив по формулам (52.20) и (52.21) пары значений r и τ_{11} , нанесем их на график, приведенный на рис. 112. Кривая 1 соответствует расчету по точной, а кривая 2 — расчету по приближенной методике. Как видно из графика, обе границы устойчивости (штриховкой показана область неустойчивости) идут достаточно близко и поэтому допускаемое обычно упрощение надо считать вполне оправданным. В дальнейшем все результаты будут получаться по приближенной методике.

Если вернуться к диаграмме на рис. 112 для того, чтобы понять основные свойства жидкостного реактивного двигателя как колебательной системы, в которой могут развиваться продольные акустические колебания, то

можно утверждать, что при малых r ($r < 0,5$) самовозбуждение акустических колебаний вообще невозможно. Это связано с тем, что при малых r период индукции слабо зависит от давления. Наименьшим значением r , при котором еще возможно самовозбуждение, является $r = 0,5$. Проще всего в этом убедиться следующим образом. Воспользовавшись равенствами (52.23), найдем выражение для потока акустической энергии, излучаемой областью теплоподвода. При этом учтем, что $\bar{v}_{10} = 0$ по краевому условию, а температуры и давления газов по обе стороны фронта горения одинаковы. Тогда, следуя формуле (19.7), можно написать

$$\bar{A}_z - \frac{1}{2} \bar{p}_{20} \bar{v}_{20} = M [(r - 1) - r \cos \omega \tilde{\tau}_n] \bar{p}_{10}^2. \quad (52.25)$$

Поскольку рассматривается самовозбуждение системы, не имеющей потерь акустической энергии на концах трубы, границе устойчивости будет соответствовать $\bar{A}_z = 0$, самовозбуждению $\bar{A}_z > 0$, а гашению колебаний $\bar{A}_z < 0$.

Легко видеть, что стоящее в прямых скобках выражение отрицательно при малых r . Чтобы сделать его при заданном r наибольшим, надо взять такое $\tilde{\tau}_n$, при котором $\cos \omega \tilde{\tau}_n = -1$. Тогда в прямых скобках будет $2r - 1$. Указанное выражение обращается в нуль при $r = 0,5$. Таким образом, наименьшим значением r , при котором может быть выполнено условие $\bar{A}_z = 0$, является $r = 0,5$, при $r < 0,5$ $\bar{A}_z < 0$, т. е. самовозбуждение невозможно.

Этот результат был получен сейчас не на основе численного примера, таким образом, утверждение, что при $r < 0,5$ колебательная система не может возбудиться ни при каких условиях, приобретает характер общей закономерности.

При $r > 0,5$ появляется область значений $(r, \tilde{\tau}_n)$, при которых колебательная система будет возбуждаться. Интервал значений $\tilde{\tau}_n$, допускающих самовозбуждение, увеличивается по мере роста r . Таковы общие закономерности, которые следуют из выражения (52.25) и которые отображены на рис. 112.

Чтобы сделать эту диаграмму еще более наглядной, приведем порядок величин r и $\tilde{\tau}_n$, наблюдавшихся в опыте,

По данным, полученным в эксперименте Крокко, Греем и Харджем¹⁾, величина r имеет порядок $1,3 \div 1,7$ (в зависимости от соотношения между количествами окислителя и горючего, подаваемых в камеру), а размерная величина периода индукции содержится в интервале $0,15 \div 0,22$ миллсекунд. Поэтому реально наблюдавшиеся значения r

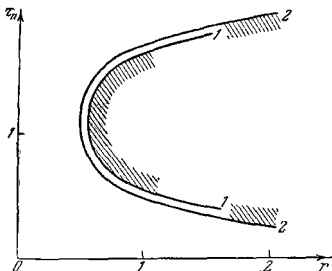


Рис. 112. Область неустойчивости, полученная точным (1) и приближенным (2) методом.

делают возбуждение продольных акустических колебаний вполне вероятным.

Рассматриваемый тип акустических колебаний в некоторых пунктах принципиально отличается от изучавшегося в предыдущих главах возбуждения колебаний теплопроводом и поэтому представляется целесообразным построить для него диаграмму границ устойчивости наподобие тех, которые строились в гл. III и IV. Напишем равенства (52.23) в форме

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_{20} &= \bar{v}_{10} - M\bar{p}_{10} + M\bar{m}, \\ \bar{p}_{20} &= \bar{p}_{10}. \end{aligned} \right\}$$

¹⁾ Сроссо L., Grey J., Harrije D. T., Jet Propulsion, 1958, № 12.

При такой записи возмущение $\overline{m}$ может зависеть не только от $\overline{p}_{10}$, но и от $\overline{v}_{10}$.

Возьмем скалярное произведение этих равенств друг на друга и учтем, что $\overline{v}_{20}\overline{p}_{20} = 0$, $\overline{v}_{10}\overline{p}_{10} = 0$, потому что

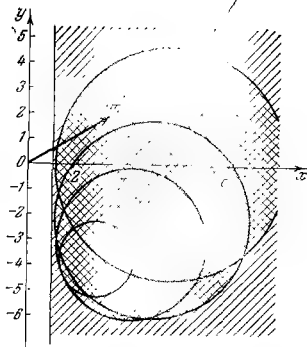


Рис. 113. Диаграмма границ устойчивости при самовозбуждении вследствие возмущения газообразования.

в системе нет потерь акустической энергии. Тогда величины $\overline{p}_{10}$ и $\overline{m}$ будут связаны следующим соотношением:

$$\overline{p}_{10}\overline{m} = \overline{p}_{10}^2,$$

которое представлено графически на рис. 113 для $|\overline{p}_{10}| = 1$ в виде вертикальной прямой $x = 1$. Как видно из этой диаграммы, возбуждение системы становится возможным только тогда, когда проекция безразмерного возмущения газообразования $\overline{m}$ на ось x (на направление $\overline{p}_{10}$) превышает абсолютную величину $\overline{p}_{10}$. Поскольку при сделанных выше предположениях абсолютная величина $\overline{m}$ прямо

пропорциональна абсолютной величине $\bar{p}_{10}$

$$\bar{m} = r(1 - e^{-\beta \tilde{\tau}_{11}}) p_1, \quad (52.26)$$

то условия возбуждения зависят от их относительной величины и от фазового сдвига, т. е. в конечном итоге от r и $\tilde{\tau}_{11}$.

Принципиальное отличие рассматриваемого случая от изучавшихся ранее заключается в том, что вместо возмущения теплоподвода или скорости распространения пламени здесь появляется возмущение газообразования. Поскольку газообразование, вообще говоря, не обязательно должно быть связано с теплоподводом (горением), то этот тип возбуждения акустических колебаний мыслим в устройствах, в которых полностью исключено горение или теплоподвод, но в которых происходит газообразование (например, испарение сильно перегретой жидкости, которая впрыскивается в камеру с пониженным давлением), если, конечно, это газообразование будет тем или иным образом зависеть от колебаний давления или скорости.

Надо сказать, что вместо построения приближенной границы устойчивости, изображенной на рис. 113 в виде вертикальной прямой, можно построить и точную, основываясь на уравнениях (52.10), а не (52.22). В этом случае, как и в гл. III и IV, можно получить семейство окружностей, центры которых движутся [в зависимости от изменения взаимно связанных равенством (19.12) величин $\bar{p}_{10}$ и $\bar{v}_{10}$] по части дуги эллипса. Соответствующее построение приведено на рис. 113 для уже упоминавшегося численного примера. Все построенные окружности лежат справа от приближенной границы устойчивости и достаточно близко к ней. Таким образом, прямую $x=1$ на диаграмме рис. 113 можно рассматривать как приближенную конфигурацию границы устойчивости при произвольном положении зоны горения вдоль оси камеры сгорания двигателя. При этом расстояние между границей устойчивости и осью x равно корню из постоянной в правой части равенства (19.12), который совпадает с $|\bar{p}_{10}|$ в пучности давления (в построенном примере эта постоянная взята равной единице).

Из рассмотрения диаграмм устойчивости становится очевидным, что система не может возбудиться, когда фронт горения будет располагаться в узле давления даже в том случае, если (например, под действием колебаний скорости) газообразование будет иметь отличную от нуля колебательную составляющую. Это видно из того, что область неустойчивости не захватывает ни одного участка оси y ; более подробный анализ показывает, что, например, при $p_{10} = 0$; $\bar{v}_{10} = 1$ окружность, соответствующая изображенной в правой части рис. 28, имеет мнимый радиус.

После сделанных замечаний вернемся к обсуждению диаграммы, приведенной на рис. 112. На этой диаграмме даны не все области неустойчивости, а лишь одна из них, соответствующая колебаниям основного тона и характеризующая наименьшими значениями $\tilde{\tau}_n$ для этой гармоник. Следует, правда, напомнить, что само понятие гармоник может прилагаться к системе, в которой свойства Σ переменны лишь с известными оговорками (подробнее об этом см. § 27). Если условиться считать за собственные частоты системы те, которые получились бы при акустических колебаниях в той же камере сгорания и при том же потоке газа, но без взаимодействия с зоной горения, то они определяются формулой (5.4)

$$\omega = (1 - M^2) K \pi \quad (K = 1; 2; 3; \dots). \quad (52.27)$$

В рассматриваемом случае такие частоты возникают при $r = 0,5$ и

$$\omega \tilde{\tau}_n = N \pi \quad (N = 1, 3, 5, \dots). \quad (52.28)$$

Проще всего убедиться в этом, используя первое равенство (52.23). Вспомнив, что на границе устойчивости $\beta = i\omega$, легко видеть, что при $r = 0,5$ и $\omega \tilde{\tau}_n$, определяемых по соотношению (52.28), $\bar{v}_{20} = 0$, так как краевое условие даст $\bar{v}_{10} = 0$. Следовательно, в этом случае краевые условия можно записать в виде $\bar{v}_2 = 0$ при $\xi = 0$ и $\bar{v}_2 = 0$ при $\xi = 1$, т. е. сформулировать их для концов трубы так, чтобы между концевыми сечениями не было фронта горения (при $\xi = 0$ краевое условие выражается теперь через $\bar{v}_2$, а не $\bar{v}_1$). Полученная в § 5 формула

(52.27) выводилась в таком именно предположении — на концах трубы одинаковые узлы (оба давления или обе скорости), а между ними нет поверхностей разрыва. Впрочем, частоты, даваемые формулой (52.27), можно найти и непосредственно из соотношений, полученных в настоящем параграфе. При $\omega \tilde{\tau}_n$, определяемых формулой (52.28) (ее можно рассматривать как следствие равенства (52.21) для $b = -1$ и $r = 0,5$), величина мнимой части равенства (52.19) должна быть равной нулю. Этому соответствует $c = 0$, или, по формуле (52.24), $\sin \frac{2}{1-M^2} \omega = 0$, что дает $\frac{2}{1-M^2} \omega = 2K\pi$, т. е. формулу (52.27) $\left[\frac{2}{1-M^2} \omega = K\pi \right]$ не является решением для нечетных k , так как в этом случае знаменатель в выражении для c (52.24) обращается в нуль и $c = \infty$.

Следовательно, те частоты, которые обычно принято называть собственными частотами, возбуждаются лишь при вполне определенных r и $\tilde{\tau}_n$. На рис. 112 этому соответствует всего одна точка границы устойчивости — та, для которой $r = 0,5$. Легко убедиться в том, что эта точка получается при $K = 1$ и $N = 1$ в формулах (52.27) и (52.28).

Для других точек, лежащих на границе устойчивости, частоты ω отличаются от частот, определяемых выражением (52.27). Если оставаться в пределах значений r , показанных на рис. 112, то для крайних точек эти частоты будут отличаться от частоты, соответствующей $r = 0,5$ на $\pm 10\%$ (для верхней ветви границы устойчивости они будут меньше, для нижней — больше). Поскольку, как это видно из приведенного примера, в довольно широком диапазоне изменений r возбужденные частоты близки к величинам, даваемым формулой (52.27), последним выражением можно пользоваться для приближенной оценки частот колебаний.

Изображенная на рис. 112 кривая не является единственной границей устойчивости в плоскости параметров $(r; \tilde{\tau}_n)$. Действительно, если обратиться к выражению (52.19), то сразу видно, что если для него существует

хотя одно решение $\tilde{\tau}_n^*$; ω^* , то на его основе можно построить бесчисленное множество решений следующими двумя путями.

Во-первых, не изменяя r и ничего не меняя в правой части равенства (в том числе и ω^*), можно сразу утверждать, что если решение существует для некоторого $\tilde{\tau}_n^*$, то оно будет существовать и для всех

$$\tilde{\tau}_n = \tilde{\tau}_n^* + \frac{2(N-1)\pi}{\omega^*} \quad (N = 1, 2, 3, \dots). \quad (52.29)$$

Во-вторых, можно поступить следующим образом. Полагая $N = \text{const}$ и сохраняя r , изменим аргументы входящих в коэффициенты b и c тригонометрических функций следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \omega \tilde{\tau}_n &= \omega^* \tilde{\tau}_n^*, \\ \frac{2}{1-M^2} \omega - 1 &= \frac{2}{1-M^2} \omega^* + 2(K-1)\pi \\ &\quad (K = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (52.30)$$

Здесь, как и в предыдущем случае, ω^* — частота, соответствующая $K=1$ (первой гармонике), а ω — частоты для всех гармоник.

Приведенное здесь рассуждение можно приложить к каждой точке границы устойчивости, изображенной на рис. 112. Следовательно, всю границу можно перестроить и получить бесчисленное множество областей неустойчивости для всех комбинаций K и N .

Соответствующее построение для нескольких комбинаций значений K и N приведено на рис. 114. Как видно из приведенной диаграммы, увеличение K опускает область неустойчивости, в то время как увеличение N поднимает ее. Если взять все возможные комбинации значений K и N , то практически вся область, лежащая справа от штриховой линии $r=0,5$, будет заполнена областями неустойчивости. Следовательно, при $r > 0,5$ и при любом $\tilde{\tau}_n$ (кроме, конечно, $\tilde{\tau}_n = 0$) колебательная система способна к возбуждению. В зависимости от $\tilde{\tau}_n$ и r это будет касаться той или иной гармоники или сразу нескольких гармоник.

До сих пор рассматривался почти исключительно тот случай, когда фронт горения расположен в непосредственной близости от головки двигателя. Единственным исключением было построение диаграммы устойчивости на рис. 113, которая остается справедливой для произвольного расположения фронта горения по длине камеры сгорания.

При обсуждении указанной диаграммы говорилось, в частности, что в узле давления возбуждение системы

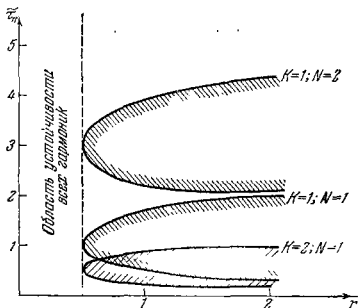


Рис. 114. Области неустойчивости для двух гармоник системы.

невозможно. Поэтому следует проанализировать более подробно вопрос о склонности рассматриваемой колебательной системы к самовозбуждению в зависимости от положения фронта горения по длине камеры сгорания двигателя.

Чтобы осуществить такой анализ, следует пользоваться точными соотношениями для фронта горения (52.11), а не приближенными (52.22). Это связано с тем, что по мере перемещения к узлу давления (т. е. по мере уменьшения абсолютных величин $\bar{p}_1$ и $\bar{p}_2$ и увеличения $\bar{v}_1$ и $\bar{v}_2$) пренебрежение членом, имеющим множителем $\bar{v}_2$ во втором равенстве (52.7), является незаконным. Действительно,

условие $\bar{p}_1 = \bar{p}_2$, которое заменяет второе уравнение (52.7) в соотношениях (52.22) (в них, кроме того, полагается $\bar{s}_1 = \bar{s}_2 = 0$), можно рассматривать как приближенную запись второго равенства (52.7) при $\bar{s}_2 = 0$, поскольку $M \gg 1$. Однако при $\bar{p}_2 \rightarrow 0$ и $\bar{p}_1 \rightarrow 0$ такое утверждение становится ошибочным¹⁾.

Выше было показано, что возбуждение продольных акустических колебаний в жидкостных реактивных двигателях существенно связано с двумя параметрами: r и $\tilde{\tau}_n$. Приступая к анализу влияния на самовозбуждение колебаний относительного расстояния фронта горения от головки двигателя $\xi_{\text{ф}}$, надо условиться о предположениях, которые будут сделаны относительно r и $\tilde{\tau}_n$. Величина r будет задаваться и оставаться постоянной. Параметр $\tilde{\tau}_n$ будем считать переменным и выбирать его так, чтобы $\cos \omega \tilde{\tau}_n = -1$. Если выбирать $\tilde{\tau}_n$ из написанного условия, то будут обеспечиваться наилучшие условия для возбуждения колебаний. Это видно, например, из того, что при $\cos \omega \tilde{\tau}_n = -1$ вектор $\bar{m}$ на диаграмме рис. 413 располагается горизонтально (фазы $\bar{m}$ и $\bar{p}$ будут совпадать) и поэтому возбуждение системы окажется воз-

¹⁾ В этом пункте в упоминавшейся книге Крокко и Чжена (а также в статьях названных авторов в периодической литературе) допускается неточность. Они пользуются приближенным соотношением типа (52.22) для произвольного положения фронта горения и делают ряд упрощающих предположений, законность которых не вполне ясна. В результате полученные ими границы устойчивости (фиг. 29 названной книги и ряд других) вызывают сомнения. Это видно, в частности, из такого примера. Рассмотрим устойчивость основного тона при положении фронта горения в середине камеры сгорания, т. е. в узле давления. Если пользоваться соотношением типа (52.22), то это даст $\bar{p}_1 = \bar{p}_2 = 0$ и $\bar{v}_1 = \bar{v}_2$, или (учитывая, что $n-1$ и $m-1$) $\delta E = 0$ и $\delta X = 0$ (см. формулы (17.1)). Тогда в системе без потерь типа рассматриваемой в настоящем параграфе будут нейтральные колебания. Это подробно показано в § 22 при обсуждении равенства (22.6). Следовательно, при положении фронта горения в середине камеры сгорания система будет на границе устойчивости. В книге же Крокко и Чжена такому положению фронта горения соответствует устойчивость. Надо заметить, что возможные уточнения могут изменить лишь количественную, но не качественную сторону выводов Крокко и Чжена.

можным при минимальной абсолютной величине $\bar{m}$. Если указанное условие выполнено, а $r=0,5$, то частоты колебаний даются формулой (52.27), т. е. совпадают с «естественными» акустическими частотами. Поскольку ниже будут рассматриваться сравнительно близкие к 0,5 значения r , то и частоты колебаний должны быть близкими к частотам (52.27).

Таким образом, ниже будут рассмотрены колебания с частотами, близкими к обычным акустическим частотам, и при таких $\tilde{\tau}_n$, которые в известной мере наибольшим образом содействуют возникновению автоколебаний.

Пусть $r > 0,5$. Тогда при положении фронта горения у головки колебательная система будет возбуждаться (это видно из рис. 114). Начнем перемещать фронт горения от головки и найдем положение, при котором самовозбуждение станет невозможным. Напишем выражение для потока акустической энергии, излучаемой зоной горения, и приравняем его нулю. При сделанных предположениях он будет равен

$$\bar{A}_\Sigma = \frac{1}{2} (\bar{p}_{20} \dot{\bar{v}}_{20} - \bar{p}_{10} \dot{\bar{v}}_{10}) = \frac{1}{2} (a_1 \bar{p}_{10}^2 + a_2 \bar{v}_{10}^2) = 0, \quad (52.31)$$

где a_1 и a_2 — численные коэффициенты, которые легко получаются при почленном скалярном перемножении равенств (52.11), приведенных к виду (52.14), друг на друга с учетом того, что при $\beta \tilde{\tau}_n = i\omega \tilde{\tau}_n$, взятых по оговоренному выше условию, $1 - e^{-\beta \tilde{\tau}_n} = 2$.

Величины $\bar{p}_{10}^2$ и $\bar{v}_{10}^2$ связаны равенством (45.6) и поэтому абсолютные величины $\bar{p}_{10}$ и $\bar{v}_{10}$ могут быть записаны при помощи формул (45.7). Тогда равенство (52.31) сведется к следующему уравнению относительно параметра φ , определяющего положение сечения Σ вдоль стоячей волны акустических колебаний:

$$a_1 \cos^2 \varphi + a_2 \sin^2 \varphi = 0$$

или

$$a_1 + (a_2 - a_1) \sin^2 \varphi = 0,$$

откуда

$$\sin \varphi = \sqrt{\frac{a_1}{a_1 - a_2}}. \quad (52.32)$$

Построим для упоминающегося выше численного примера зависимость φ от r (коэффициент a_1 является функцией r). Результаты расчетов можно представить следующей таблицей:

r	0,50	0,75	1,25	2,00
φ	0	0,35	0,59	0,71
	π	2,79	2,55	2,43
	0	-0,35	-0,59	-0,71
	π	-2,79	-2,53	-2,43

Чтобы придать этому расчету наглядность, на рис. 115 изображена эпюра стоячей волны давления и скорости

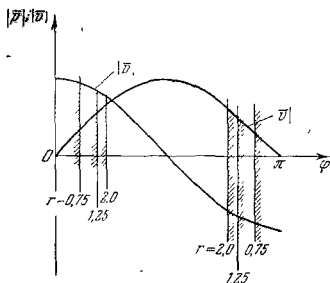


Рис. 115. Эпюры стоячих волн давления и скорости в области неустойчивости для различных r .

при изменении φ от 0 до π и положения найденных сечений на ней. Как видно из диаграммы, по мере увеличе-

ния r увеличиваются области неустойчивости в окрестностях $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$. Это означает для первой гармонки, что неустойчивость будет возникать в двух случаях: при положении фронта горения у головки и при положении его у сопла. Пользуясь найденными величинами,

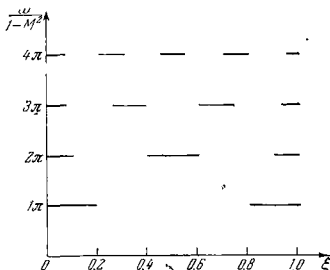


Рис. 116. Диаграмма распределения областей неустойчивости для первых четырех гармоник, в зависимости от положения плоскости горения по длине камеры сгорания.

можно построить диаграмму распределения зон устойчивого и неустойчивого процесса, в зависимости от положения фронта горения по длине трубы, наподобие диаграмм рис. 48. Поскольку слева и справа от зоны горения температура газов одинакова, частота гармоник не будет изменяться при смещении плоскости горения вдоль камеры двигателя. На каждой стоячей волне можно отметить точки, соответствующие приведенным в таблице значениям параметра φ . В таком случае, отмечая, как и в предыдущих главах, области неустойчивости прямыми линиями, легко построить диаграмму, приведенную на рис. 116, для какого-либо зафиксированного значения r .

Из диаграммы на рис. 116 видно, что если процесс в камере сгорания склонен к вибрационному горению, то оно должно наступить вне зависимости от положения

зоны горения по длине камеры сгорания. Разница будет заключаться лишь в том, что в зависимости от координаты фронта горения $0 < \xi_f < 1$ будет возбуждаться та или иная гармоника.

Чтобы ввести дополнительную ясность в этот вопрос, напомним, что в настоящем параграфе рассматривается система без потерь. Если написать красное условие у сопла более строго, с учетом градиента скорости в нем, то, как показано в книге Крокко и Чжепа, демпфирующее влияние сопла будет возрастать с увеличением частоты колебаний. Поэтому возбуждение высших гармоник становится маловероятным, что характерно и для вибрационного горения газовых горючих смесей в трубах (см. гл. VI).

Приведенная на рис. 116 диаграмма напоминает аналогичные диаграммы рис. 48, 49 и др. В обоих случаях рассматривается изменение номера возбуждаемой гармоники в зависимости от положения зоны горения по длине трубы. В конце гл. V рассматривалась и обратная задача: при неизменных свойствах зоны горения и неизменной длине горячей части проследить влияние изменения общей длины трубы на характер колебаний. Там было показано, что общее удлинение трубы при сохранении горячей части ведет к тому, что система переходит к более высоким гармоникам, приблизительно сохраняя неизменной размерную частоту колебаний.

Аналогичное заключение должно быть справедливым и для жидкостных реактивных двигателей. Это явление фактически наблюдалось Крокко, Греем и Харджем¹⁾. Постепенно удлиняя камеру сгорания, они зарегистрировали переход колебаний с основного тона на вторую гармонику, а со второй на третью, что полностью согласуется с развитой в конце гл. V точкой зрения.

В настоящем параграфе было дано лишь элементарное изложение теории высокочастотных продольных акустических колебаний в жидкостных реактивных двигателях. Интересующимся более полным изложением вопроса следует порекомендовать обратиться к уже упоминавшейся

¹⁾ Crocco L., Grey J., Harrije D. T., Jet Propulsion, 1958, № 12.

монографии Крокко и Чжена и к соответствующим статьям в периодической литературе.

В заключение настоящего параграфа сделаем одно замечание. Во всех предыдущих разделах многократно подчеркивалось, что в конечном итоге причиной возбуждения вибрационного горения является возмущение теплоподвода или эффективной скорости распространения пламени. В случае возбуждения акустических колебаний в жидкостных реактивных двигателях основным является возмущение газообразования (возмущение расхода некоторого источника массы, расположенного в зоне горения). Следовательно, вибрационное горение может иметь самую различную природу. В общем случае оно может возбуждаться за счет любого слагаемого, входящего в систему (15.5) и описывающего процесс внутри области σ . Это может быть δM^* (рассмотренный только что случай), δQ^* (труба Рийке), подвижность фронта пламени, т. е. отличие от нуля входящих во все три уравнения частных производных от интегралов по объему V (случай, рассмотренный в § 49), возмущение теплотворной способности смеси δq_1 и полноты сгорания $\delta q_1 - \delta q_2$ (пример, приведенный в § 25). Наконец, возбуждение акустических колебаний может оказаться связанным с отличием от нуля слагаемого δP_x . Этот процесс реализуется, например, в тех случаях, когда в зоне σ происходит периодический срыв вихрей (без горения). Тогда взаимодействие вихреобразования с акустическими колебаниями может привести к самовозбуждению колебательной системы. Поскольку этот случай никак не связан с процессом горения, он в книге не рассматривался.

Такое разнообразие причин возбуждения продольных акустических колебаний требует самого внимательного анализа всех входящих в систему (15.5) переменных до того, как будет принята схема идеализации процесса возмущенного горения.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автоколебания 344
- , методика расчета 373
- при наличии потерь 368
- — отсутствии потерь 358
- продольные в газовом течении 72
- , сравнение расчетных и опытных характеристик 367
- Акустика степидовых установок 246
- Амплитуда комплексная 26
- Бернулли уравнение 79
- Вихреобразование 298, 303, 306
- Влияние длины входного участка 246
- — трубы 244
- положения зоны горения 229
- Возбуждение вибрационного горения 401
- звука (термическое) 75, 418
- колебаний теплоподводом 170
- колебательной системы 146
- — — волнами энтропии 107
- Волна акустическая 35
- бегущая акустического импульса (безразмерного) 37, 59
- — (безразмерной) энтропии 59
- — плоская 37
- стоячая (безразмерного) давления 47
- — (безразмерной) скорости 47
- Газ неизоэнтропический 35
- Гармоника 44
- Гипотеза о максимуме акустической энергии 381, 394
- Рэлея 10, 76, 81, 388
- Головка камеры сгорания 474
- Горение «жесткое» 468
- пульсационное 468
- , растянутое вдоль оси течения 408
- Граница устойчивости 22, 66, 95, 151, 185, 225, 259, 264, 272
- Декремент затухания колебаний 66
- Демпфер акустический 405
- Диаграмма векторная режима колебаний 24
- вероятных режимов самовозбуждения 391
- (границ) устойчивости 94, 97, 99, 100, 152, 156, 158, 187—189, 192, 203, 214, 273, 364, 486, 495
- изменения потока акустической энергии 167
- Длина волны возмущения (стоячей) 48
- Заброс пламени периодический 367
- Завихренность 298, 303, 306
- Задача краевая 42
- Заназывание процесса сгорания 318
- тепловыделения 210, 420
- Запись аналитическая процесса колебаний 24
- Значение частот собственное 44
- Зона горения 112, 116
- догорания 113
- Идентификация процессов в зоне горения 112
- Изменение частот ступенчатое 220

- Импеданс 251
 Инкремент возрастания колебаний 66
 Источник поджигающий 315
 Источники массы, импульса и энергии фиктивные 124—128
 — энергии колебаний 75, 162
 Кипка формула 419
 Колебания акустические в ЖРД 17
 — — газового столба 9
 —, возбуждаемые теплоподводом 13
 — высокочастотные в камере сгорания 9
 — качества распыла 294
 — поперечные 17
 — продольные 17
 — — в ЖРД 471
 — радиальные 17
 — тангенциальные 17
 Коэффициент избытка воздуха 205
 Криван Лайтхилла 421
 Кривизна фронта пламени 325
 Критерий (гипотеза) Рэлея 10, 76, 81, 388
 Крокко механизм 10, 318
 Лавая сонло 20, 110
 Лайтхилла кривая 421
 Лицеарпизация уравнений гидромеханики 29
 Метод малых возмущений 20
 — нахождения корней характеристического уравнения графический 183
 — D -разбегания пространства параметров 199
 Механизм Крокко 10, 318
 — обратной связи, классификация 277
 Нелинейность существенная 346, 347
 Обертон 44
 Обобщение критерия Рэлея 96
 Осциллограмма давления в ПВРД 468
 Осциллограмма давления у закрытого конца трубы 16
 — колебаний скорости 298
 — колебания давления при неустойчивости нескольких гармоник 238
 Первопричина возникновения автоколебаний 380
 Переменные безразмерные 38
 Период акустических колебаний 57
 — индукции 319
 Плоскость теплоподвода 124
 Поглощение энергии явное на конце трубы 267
 Подавление вибрационного горения 401
 Подача горючего неравномерная 286
 Подвод тепла во фронте пламени 129, 133
 — — на неподвижной плоскости 128
 Показатель характеристический 337
 Полнота сгорания мгновенная эффективная 119
 Потери на излучение 251
 — — концах трубы 368
 Поток акустической энергии 82
 Правило штриховки 199
 Прямая особая 202
 Пучность стоячей волны 47
 Развитие процесса вибрационного горения 376
 Разгон колебаний 383
 Распространение возмущений в движущемся газе 29
 — пламени в неподвижном газе 436
 Расход воздуха колеблющийся 292
 Резонанс параметрический 342
 Решетка спрямляющая 301
 Рийке труба 13, 418
 Рэлея критерий (гипотеза) 10, 76, 81, 388

- Самовозбуждение автоколебаний мягкое 62
 — продольных акустических колебаний 19
 Связь обратная 171, 277
 — —, имеющая в основе гидромеханические явления 296
 — —, — — — — — смесеобразованию 286
 — —, основанная на закономерности горения 313
 — — с запаздыванием 284
 Скорость движения фронта пламени эффективная 133
 — распространения пламени (эффективная) 133, 313, 340
 Сопло камеры сгорания 474
 — Лаваля 20, 110
 Сопротивление акустической системы 253
 — тепловое 79
 Срыв пламени 205
 Стадии развития вибрационного горения 376
 Стенд испытательный 69
 Структура пламени ячеистая 331
 Схема идеализированная вибрационного горения 136
 — — жидкостного реактивного двигателя 211, 473
 — — проточного воздушно-реактивного двигателя 467
 — разделения стендового воздухопровода и входного участка камеры 246
 Тон колебаний основной 44
 Точка пылеугольная 459
 Труба Рijke 13, 418
 Трубопровод с критическим сужением 70
 Узел стоячей волны 47
 Уравнение Бернулли 79
 — движения жидкости Эйлера 30
 Уравнение неразрывности 30
 — характеристическое газового течения 176, 178, 255
 Условие сохранения энтропии частицы 30
 Условия возбуждения 204
 — краевые, начальные 42
 — на плоскости разрыва в каноническом виде 139
 Установки стендовые, акустика их 246
 Устойчивость газового течения 61
 — фронта пламени 322
 Формула Кинга 419
 Формулы имясашцев 253, 254
 Фронт пламени 322
 Частота колебаний 216, 217
 — собственная 44
 Эйлера уравнение движения жидкости 30
 Энергия автоколебаний 11, 143
 — — в общем случае 101
 — — — — — первом элементарном процессе 92
 — — во втором элементарном процессе 98
 Эпюра амплитуды бегущей волны 60
 — — волны акустического импульса 60, 67
 — — — энтропии 60
 — — колебаний давления 248, 249
 — — стоячей волны 50, 450, 494
 — давления 52, 53
 — мгновенных значений бегущих волн 61
 — — — — — стоячих волн 52, 53
 — скорости 52
 «Эффект открытого конца» 254